



الجبر

چشم انداز

ریاضیات

دوره دوم ریاضیات عمومی شامل قسمت دیگری از ریاضیات است که این قسمت بنام الجبر مسمی میباشد، در الجبر بر علاوه اعداد از حروف نیز استفاده میگردد و همچنان اعداد با در نظر داشت علامه آنها استعمال می شوند. روی این منظور در فصل اول این دوره، اجرای چهار عملیه اساسی بالای اعداد تشریح گردیده به تعقیب آن مطلب دیگری تحت نام توانها بیان داده شده است که توان ها بیان شده است که توانها فقط طریقه ضرب و تقسیم نمودن اعداد و حروف را برای شما می آموزاند.

معلومات:

ریاضیات عبارت از علم است که از مقادیر و اعداد بحث می‌کند. یعنی تمام مقدارها را به وسیله اعداد و افاده‌ها ارائه می‌نماید. بنا می‌توان تمام حوادث طبیعی را توسط این علم به وسیله فورمول‌ها طرح ریزی نموده و در خدمت علوم ساینسی قرار داد.

از این علم در گذشته‌ها نیز به شکل ابتدائی آن استفاده می‌نمودند اما به اثر سعی و تلاش دانشمندان جهان در زمانه‌های مختلف تغییرات جدی به این علم رونما گردید. تا بالاخره این علم بشکل امروزی مربوط و منوط به این علم می‌باشد.

همچنان ریاضیات را در قدیم‌ترین لسان طبیعت می‌گویند. چنانچه در این رابطه دانشمند بزرگ ایتالیوی گالیله می‌گوئید: ریاضی زبان قوانین طبیعت است زیرا انسان از همان آوان پیدایش با این علم آشنائی داشتند. ریاضیات را از جمله هنرها نیز می‌شمارند زیرا یکی از خواص هنرها این است که فقط کسی می‌تواند هنری را بیاموزد که خداوند (ج) به او استعداد همان هنر را داده باشد. مثلاً: هر شخص نمی‌تواند نقاش خیلی‌ها برجسته مانند (پاپلو پیکاسو) باشد، ریاضیات را نیز کسی خوب درک می‌کند که استعداد آن را خداوند به او اعطا نموده باشد. (نظریه مؤلف امین)

ریاضیات به صورت عموم به چهار بخش اساسی (حساب، الجبر، هندسه و مثلثات) تقسیم شده. شاخه‌های این علم طوری با همدیگر مرتبط اند که فراگیری یکی آن در عدم موجودیت دیگرش ناممکن می‌باشد.

الجبر (ALGEBRA)

الجبر یکی از بخش های خیلی ها مهم و اساسی علم ریاضیات بوده که جبران کردن و مرتب نمودن معنی می دهد. و همچنان الجبر از جبر گرفته شده و جبر بسته کردن استخوان شکسته را گویند. این علم تمام مسائلی را که علم حساب از حل آن عاجز مانده و به شکل فورمول ها طرح ریزی نموده و به بسیار سهولت به حل آن می پردازد.

در گذشته ها علمای زیادی (لیونارد اویلر، ارسطو، البیرونی، خیام، ویت و غیره ...) در جهت بهتر شدن این علم خدمت نمودند. اما با این هم این علم به شکل خیلی ابتدائی مورد استفاده قرار می گرفت تا بلاخره در سال (203) هـ ش در زمان حکومت مأمون الرشید شخصی بنام جابر محمد بن موسی خوارزمی کتابی را بنام الجبر المقابله تألیف نمود. که یک سلسله مطالب جبری را به خصوص دریافت جذور معادلات درجه دوم را بیان نمود، که در حقیقت آغاز الجبر کنونی بود. به همین مناسبت شخص جابر محمد بن موسی خوارزمی را بنیان گذار علم الجبر می دانند. الجبر را می توان چنین نیز تعریف نمود:

الجبر: عبارت از علم است که بر علاوه اعداد، ضرایب و متحول ها (حروف) رانیز مورد مطالعه قرار می دهد. الجبر شامل اعداد و حروف مانند: $x, y, a, b, e, t, c, \dots$ می باشد، که حروف در الجبر نشان دهنده مقادیر کمیت ها مانند: حجم، طول، عرض، کتله، ضخامت، وزن و غیره می باشد. و یا به عباره، اعداد الجبری عبارت از اعداد حقیقی Real number, $(\mathbb{R})$ است که شامل بر اعداد تام، طبیعی، مکمل، نسبتی می باشد و همچنان در الجبر حروف مانند: $a, b, c, m, t, \dots$ بکار برده می شود که این حروف نشان دهنده مقادیر و کمیت هایی مانند: طول، کتله، زمان، حجم و ... می باشد.

نظر به تعریف فوق پس الجبر تمام اعداد حقیقی (اعداد مثبت و اعداد منفی) را مورد مطالعه قرار می دهد.

قابل تذکر است که الجبر عددی و الجبر حروفی تقسیم گردیده است و همچنان علم الجبر دارای شاخه های مختلف ذیل می باشد.

➤ الجبر خطی

➤ الجبر مدرن

➤ الجبر تیوری

➤ الجبر هندسی

➤ الجبر تطبیقی

➤ الجبر مجرد

➤ الجبر بولن

تعریف الجبر

الجبر در لغت جبران کردن را گویند . همچنان الجبر فن انجام عمل بالای کمیت های مجهول را می گویند . الجبر از نام کتاب دانشمندی بنام محمد بن موسی خوارزمی که (الجبر والمقابله) بود گرفته شده است.

فرق های عمده بین بخش حساب و الجبر

✓ 1- حساب بالای کمیت های معلوم بحث می کند در حالیکه الجبر بالای کمیت های مجهول بحث می کند.

✓ 2- حساب موضوعات را در یک سطح خاص بررسی می کند در حالیکه الجبر موضوعات را در یک سطح کلی تر و عمومی تر بررسی مینماید.

حساب: 2 قلم + 4 قلم = 6 قلم الجبر: $2n-1$ فورمول اعداد تاق (عمومی است)

✓ 3- در بخش حساب تمام اعداد کنار هم در حالت جمع قرار دارند در حالیکه در بخش الجبر اعداد و حروف در حالت ضرب اند.

حساب: $222 = 200 + 20 + 2$ الجبر: $2xy = (2)(x)(y)$

✓ 4- دربخش حساب تنها اعداد بکار میرود درحالیکه دربخش الجبر برعلاوه اعداد ازحروف نیز کار میگیریم.

✓ 5- دربخش حساب کلاسیک اعداد بدون علامه درنظر گرفته میشد درحالیکه دربخش الجبر هر عدد یا افاده دارای علامه مشخص مثبت و یا منفی می باشد.

اعداد الجبری یا حقیقی

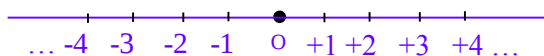
به مجموعه اعداد ناطق و غیر ناطق اعداد الجبری یا حقیقی می گویم . ویا به عبارت دیگر به مجموعه اعداد نسبتی و غیرنسبتی اعدادحقیقی گفته میشود . یعنی تمام اعدادی را که ما می شناسیم ازقبیل اعداد (مثبت، منفی ،کسری ، جذری ، وغیره) شامل ست اعداد حقیقی اند بدون تقسیم برصفر

$$\mathbb{R} = \{+1, -2, \frac{4}{5}, \sqrt{7}, \dots\}$$

و جذر جفت اعداد منفی

محور اعداد

فرض کنیم x یک خط افقی راست باشد . یک نقطه دلخواه O را بر x اختیار کرده ، آنرا مبدأ می نامیم و O را نمایش عدد صفر می گیریم درطرف راست صفر ، یک نقطه دلخوا اختیار و آنرا عدد 1 می گیریم .جهت حرکت از 0 به 1 درطول جهت مثبت می نامیم، که صفر بزرگتر از تمام اعداد منفی و کوچکتر از تمام اعداد مثبت می باشد.



نکته

تمام اعداد حقیقی در روی محور اعداد جای مخصوص خود را دارند اما اعدادی مانند $\sqrt[n]{-a}$ ، $\frac{a}{0}$ یا

$\sqrt[n]{-9}$ ، $\frac{34}{0}$ و ... در روی محور اعداد کدام مکان مشخصی ندارند.

قیمت مطلقه (قدر مطلق)

قیمت مطلقه $|x|$ یک کمیت عبارت از مقدار خود کمیت بدون علامه آن است. و یا به عباره دیگر فاصله هر عدد تا مبدأ محور اعداد را قیمت مطلقه آن عدد می گویند.
مثال: قیمت مطلقه های اعداد زیر را بیابید.

$$|-10| = 10, \quad | +10| = 10$$

شکل علمی قیمت مطلقه

هر گاه عددی مانند x در داخل قیمت مطلقه موجود باشد دارای سه حالت ذیل می باشد.

- 1- در صورتیکه x یک عدد مثبت باشد درینصورت جواب خود x میشود.
- 2- در صورتیکه x عدد منفی باشد x ضرب در یک منفی میشود.
- 3- در صورتیکه x برابر به صفر باشد پس حاصل مساوی به صفر میشود.

$$|x| = \sqrt[2]{x^2} = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{بطور عموم:}$$

$$\text{مثال [۱]: قیمت مطلقه افاده } |\pi - 2| = \pi - 2$$

چون داخل قیمت مطلقه چون حاصل مثبت است جواب پس خودش شد.

$$\text{مثال [۲]: قیمت مطلقه افاده } |2\pi - 10| = -(2\pi - 10) = -2\pi + 10$$

چون مقدار داخل قیمت مطلقه منفی است باید ضرب در یک منفی شود.

عملیات اساسی بالای اعداد

بصورت کل هر عدد بجز از صفر دارای علامه می باشد که علامه آن مثبت (+) است یا منفی (-) و صفر عددیست که علامه ندارد و بناً با در نظر داشت علامه های اعداد چهار عملیه اساسی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را بالای آنها قرار ذیل اجرا می کنیم.

عملیه جمع

برای جمع اعداد الجبری دو حالت را در نظر میگیریم.

➤ **حالت اول:** اگر دو عدد هم علامه باشند برای جمع آنها ابتدا آن دو عدد را با هم جمع نموده و سپس علامت مشترک آنها را به عنوان علامت جواب در نظر میگیریم.

نمونه های از جمع اعداد هم علامه ذیلاً بیان شده است:

مثال ها:

- 1) $(+10) + (+5) = +15$
- 2) $(+7) + (+3) = +10$
- 3) $(-3) + (-2) = -5$
- 4) $(-2) + (-2) = -4$

➤ **حالت دوم:** اگر دو عدد مختلف العلامه باشند برای جمع آنها بدون توجه به علامتها عدد کوچک را از عدد بزرگ تفریق نموده سپس علامه عدد بزرگتر را به عنوان علامت جواب در نظر میگیریم.

نمونه های از جمع اعداد مختلف العلامه ذیلاً بیان شده است:

مثال ها:

- 1) $(+7) + (-10) = -3$
- 2) $(+12) + -4 = +8$
- 3) $(-12) + (+4) = -8$
- 4) $(-1) + (+1) = 0$

➤ **بطور خلاصه** اعداد هم علامه با هم جمع و مختلف العلامه از همدیگر تفریق میگردد. هر عدد به جز صفر که قبل از آن علامه نباشد علامه مثبت است. یعنی «+a» را بصورت «a» می نویسند.

عملیه تفریق

برای تفریق اعداد الجبری، ابتدا علامه وسطی را به داخل قوس ضرب نموده بعداً جمع الجبری می کنیم.

مثال ها: نمونه های از تفریق اعداد الجبری ذیلاً بیان شده است:

- 1) $(+8) - (+12) \Rightarrow (+8) + (-12) = -4$
- 2) $(+10) - (-6) \Rightarrow (+10) + (+6) = 16$
- 3) $(-14) - (-9) \Rightarrow (-14) + (+9) = -5$
- 4) $(-1) - (+1) \Rightarrow (-1) + (-1) = -2$
- 5) $(-1) - (-1) \Rightarrow (-1) + (+1) = 0$

عملیه ضرب

حاصل ضرب دو عدد هم علامه همیشه عدد مثبتی بوده و حاصل ضرب دو عدد مختلف علامه عدد منفی می باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} (+)(+) = + \\ (-)(-) = + \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (+)(-) = - \\ (-)(+) = - \end{array} \right.$$

مثال ها: نمونه های از ضرب اعداد الجبری ذیلاً بیان شده است:

- 1) $(+3)(+5) = 15$
- 2) $(-3)(-5) = 15$
- 3) $(-1)(-10) = 10$
- 4) $(-6)(+3) = -18$
- 5) $(-1)(+7) = -7$

نکته

اکنون با در نظر داشت چهار عملیه فوق و رفع نمودن قوس ها جواب افاده های ذیل را چنین دریافت میکنیم.

مثال ها:

- 1) $(+2)+(-6)-(-3)-(+5)+(+10)=2-6+3-5+10=15-11=4$
- 2) $(-10)-(-3)+(-2)=-10+3-2=-12+3=-9$
- 3) $(2+3)-(-7+4)+(-1-8)=5-(-3)+(-9)=5+3-9=8-9=-1$
- 4) $-[3-2(-4+3)]+10=-[3-2(-1)]+10=-(3+2)+10=-5+10=5$

توان

هرگاه یک عدد چندین مرتبه (دفعه) به خودش ضرب شده باشد این حاصل ضرب را بطور خلاصه به شکل توان نوشته کرده می توانیم.

بطور مثال: اگر 2 چهار مرتبه در خودش ضرب گردد، این حاصل ضرب بشکل توان چنین نوشته می شود. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ (خوانده میشود دو به توان چهار)
دین جا «2» را بنام توان یا طاقت یاد می کنند.

➤ بصورت عموم اگر a یک عدد حقیقی n یک عدد طبیعی فرض شود، بنأ به تعریف داریم که:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{(N \text{ دفعه})} = a^n$$

درینصورت (a) را بنام قاعده (n) را بنام توان یا طاقت یاد می کنند

مثال ها:

افاده های ذیل را بشکل غیر توان دار بنویسید.

- 1) $5^4 = (5)(5)(5)(5) = 625$
- 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$
- 3) $(4.5)^3 = (4.5)(4.5)(4.5) = 91.125$
- 4) $(0.5)(0.5)(0.5)(0.5) = 0.0625$

نکته

عدد 1 به هر توان که برسد مساوی به خود یک است مانند: $1^5 = (1)(1)(1)(1)(1) = 1$

نکته

اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بزرگتر برسند، کوچکتر می شوند. مانند مثال زیر:

$$(0.8)^3 = (0.8)(0.8)(0.8) = 0.512$$

خلاصه قوانین توان ها

1. $a^0 = 1 \quad a \neq 0$	8. $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$
2. $a^1 = a$	10. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad m > n$
3. $(-a)^{2n} = a^{2n} \quad a \in R, n \in Z$	11. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad m < n$
4. $(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} \quad a \in R, n \in Z$	12. $\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad m < n$
5. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	13. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
6. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$	14. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
7. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	15. $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$

قانون اول

$$x^0 := 1, \quad x \neq 0$$

هر عدد یا افاده به توان صفر مساوی به یک تعریف شده است.

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون اول ساده سازید.

$$1) \quad 12^0 = 1$$

$$2) \quad \left(2 + \frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

قانون دوم

$$a^1 = a$$

هر عدد که توان نداشته باشد توان آن 1 است.

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون دوم ساده سازید؟

$$1) \quad (3^1)(3^1)(3^1)(3^1) = (3)(3)(3)(3) = 81$$

$$2) \quad \frac{4^1}{2^1} = \frac{4}{2} = 2$$

قانون سوم

$$(-a)^{2n} = a^{2n} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

اگر قاعده منفی باشد به تمام توانهای جفت حاصل مثبت است.

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون سوم ساده سازید.

$$1) \quad (-2)^4 = ?$$

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

$$2) \quad (-1)^2 = ?$$

$$(-1)^2 = (-1)(-1) = 1$$

قانون چهارم

اگر قاعده منفی باشد به تمام توانهای فرد حاصل نیز منفی است.

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} \quad a \in R, n \in Z$$

فاده های زیر را بر اساس قانون چهارم ساده سازید.

مثال ها:

1) $(-2)^3 = ?$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)(-2) = -8$$

2) $(-\frac{1}{2})^5 = ?$

$$(-\frac{1}{2})^5 = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32}$$

قانون پنجم

اگر اعداد با قاعده های مساوی با هم در حالت ضرب باشند از قاعده ها یکی را در نظر گرفته

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

توانهای را باهم جمع می کنیم.

ثبوت: طبق تعریف توان می نویسیم.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \times a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ مرتبه } a} \cdot \underbrace{(a \times \dots \times a)}_{m \text{ مرتبه } a} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n+m \text{ مرتبه } a} = a$$

افاده های زیر را بر اساس قانون پنجم ساده سازید.

مثال ها:

1) $(3ax^3y^2)(4axy^4) = ?$

$$(3ax^3y^2)4axy^4 = 12a^{1+1}x^{3+1}y^{2+4} = 12a^2x^4y^6$$

2) $4a^{\frac{3}{2}} \times 2a^{\frac{1}{2}} \times a = ?$

$$4a^{\frac{3}{2}} \times 2a^{\frac{1}{2}} \times a = 8a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1} = 8a^{\frac{3+1+2}{2}} = 8a^{\frac{6}{2}} = 8a^3$$

3) $2a^{3m} \times \frac{1}{2}a^{-m} = ?$

$$2a^{3m} \times \frac{1}{2}a^{-m} = \frac{2}{2}a^{3m+(-m)} = a^{3m-m} = a^{2m}$$

بخاطر بسپارید که اگر دو حرف یکسان مثلاً x با x باهم به حالت جمع، تفریق ضرب و تقسیم باشند داریم

1) $x + x = 2x$

2) $x - x = 2x$

3) $x \cdot x = x^2$

4) $x \div x = 1$

بخاطر بسپارید که اگر دو حرف یکسان مثلاً x با x باهم به حالت جمع، تفریق ضرب و تقسیم باشند داریم

1) $3^2 + 3^3 = ?$

$$3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$$

2) $2^4 - 2^2 = ?$

$$2^4 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

3) $5^3 + 2^3 = ?$

$$5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$$

قانون ششم

اگر اعداد با قاعده های مختلف و توانهای مساوی باهم به حالت ضرب باشند، قاعده ها را با هم ضرب نموده از توانها یکی را انتخاب م کنیم.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون ششم ساده سازید.

1) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = ? \quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 24^2$

2) $(2a)^{-3} (-b)^{-3} = ? \quad (2a)^{-3} (-b)^{-3} = [(2a) (-b)]^{-3} = (-2ab)^{-3}$

3) $(16)^{0.5} \left(\frac{1}{8}\right)^{0.5} (0.5)^{0.5} = ?$

$$(16)^{0.5} \left(\frac{1}{8}\right)^{0.5} (0.5)^{0.5} = [(16) \left(\frac{1}{8}\right) (0.5)]^{0.5} = [(16) \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1}{2}\right)]^{0.5} = \left(\frac{16}{16}\right)^{0.5} = (1)^{0.5} = (1)^{0.5} = 1$$

4) $(-2ab)^3 (3b)^3 \left(-\frac{1}{2}c\right)^3 = ?$

$$(-2ab)^3 (3b)^3 \left(-\frac{1}{2}c\right)^3 = [(-2ab)(3b)\left(-\frac{1}{2}c\right)]^3 = \left(\frac{6ab^2c}{2}\right)^3 = (3ab^2c)^3$$

اگر یک افاده توان دار بازم به توان های دیگری باشد درینصورت توانها را باهم ضرب می‌نمائیم.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

ثبوت: طبق تعریف توان می نویسیم

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \dots \times a^m}_{n \text{ مرتبه}} = a^{\overbrace{m+\dots+m}^n} = a^{m \times n}$$

مثال ها: افاده های زیر را بر اساس قانون هفتم ساده سازید

1) $\left(\left((2x)^{-2x} \right)^x \right)^{\frac{1}{2}x} = ?$

$$\left(\left((2x)^{-2x} \right)^x \right)^{\frac{1}{2}x} = (2x)^{(-2x)(x)(\frac{1}{2}x)} = (2x)^{-x^3}$$

2) $\left(\left((-2)^2 \right)^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} = ?$

$$\left(\left((-2)^2 \right)^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} = (-2)^{(2)(-2)(-\frac{1}{2})} = (-2)^2 = (2)^2 = (2)(2)4$$

نکته

توجه شود که $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ و $a^{m^n} \neq a^{m \cdot n}$ بوده بلکه $a^{m^n} = a^{(m)^n}$ است که هر دو حالت را بررسی میکنیم

➤ الف: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ به این معنی است که ابتدا a را به توان m رسانیده و حاصل را به توان n می‌رسانیم و البته این عبارت برابر با $a^{m \cdot n}$ نیز می‌باشد مانند مثال ذیل

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

$$(2^3)^2 = (2 \times 2 \times 2)^2 = (8)^2 = (8)(8) = 64$$

➤ ب: $a^m = a^{(m)^n}$ به این معنی است که ابتدا m را به توان n رسانیده و سپس a را به

توان عدد حاصل می‌رسانیم مانند مثال ذیل

$$2^{3^2} = ?$$

$$2^{3^2} = 2^{3 \times 3} = 2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$$

قانون هشتم

اگر یک افاده کل تحت یک توان باشد، همه اعداد و حروف را میتوان جداگانه به توان کل رساند.

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

ثبوت: طبق تعریف توان داریم

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \underbrace{(ab) \times (ab) \times \dots \times (ab)}_{n \text{ مرتبه}} \\ &= \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ مرتبه}} \cdot \underbrace{(b \times b \times \dots \times b)}_{n \text{ مرتبه}} = a^n b^n \end{aligned}$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون هشتم ساده سازید.

1) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = ?$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$

2) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^2 = ?$

$$\left(-\frac{1}{2}ab\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a)^2 (b)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) a^2 b^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

3) $(-2xy^2)^3 (x^2y)^{-3} = ?$

$$\begin{aligned} (-2xy^2)^3 (x^2y)^{-3} &= [(-2)^3 (x)^3 (y^2)^3] [(x^2)^{-3} (y)^{-3}] = (-8x^3y^6)(x^{-6}y^{-3}) \\ &= -8x^{3+(-6)}y^{6+(-3)} = -8x^{-3}y^3 \end{aligned}$$

4) $\left[(3x)^{-2} \left((3)^{-1}\right)^2\right]^{-3} = ?$

$$\begin{aligned} \left[(3x)^{-2} \left((3)^{-1}\right)^2\right]^{-3} &= \left[(3x)^{-2} (3)^{(-1)(2)}\right]^{-3} = \left[(3x)^{-2} (3)^{-2}\right]^{-3} = \left[(9x)^{-2}\right]^{-3} \\ &= (9x)^6 \end{aligned}$$

قانون نهم

اگر قاعده های مختلف دارای توان های مساوی به حالت تقسیم باشند، قاعده ها را تقسیم نموده یکی از توان ها را به حیث توان کل تعیین می کنیم.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad b \neq 0$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون نهم ساده سازید.

$$1) \quad \frac{14^5}{7^5} = ? \Rightarrow \frac{14^5}{7^5} = \left(\frac{14}{7}\right)^5 = 2^5 = 32$$

$$2) \quad \left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = ? \Rightarrow \left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = \frac{(2x^3)^2}{(3y^2)^2} = \frac{4x^6}{9y^4}$$

$$3) \quad \frac{(0,8ab)^2}{(0,05a)^2} = ?$$

$$\frac{(0,8ab)^2}{(0,05a)^2} = \left(\frac{0,8ab}{0,05a}\right)^2 = \left(\frac{0,8b}{0,05}\right)^2 = \left(\frac{\frac{8}{10}b}{\frac{5}{100}}\right)^2 = \left(\frac{8b}{10} \times \frac{100}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{800b}{50}\right)^2 = (16b)^2 = 256b^2$$

$$4) \quad \frac{(4x^2)^{p-1}}{(2x)^{p-1}} = ? \Rightarrow \frac{(4x^2)^{p-1}}{(2x)^{p-1}} = \left(\frac{4x^2}{2x}\right)^{p-1} = (2x)^{p-1}$$

قانون دهم

اگر قاعده های مساوی دارای توانهای مختلف باهم به حالت تقسیم باشند، طوریکه توان صورت از توان مخرج بزرگتر باشد درینصورت از قاعده ها یکی را انتخاب نموده از توان صورت توان مخرج را تفریق می کنیم.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad m > n$$

ثبوت : طبق تعریف توان دار منفی و استفاده از (a) می نویسیم.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون دهم ساده سازید.

1) $\frac{3^5}{3^2} = ?$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

2) $\frac{(4xy^3)^5}{(4xy^3)^3} = ?$

$$\frac{(4xy^3)^5}{(4xy^3)^3} = \frac{(4xy^3)^5}{(4xy^3)^3} = (4xy^3)^{5-3} = (4xy^3)^2 = 4^2 x^2 (y^3)^2 = 16x^2 y^6$$

3) $(2y)^3 \div (2y)^{-2} = ?$

$$(2y)^3 \div (2y)^{-2} = \frac{(2y)^3}{(2y)^{-2}} = (2y)^{3-(-2)} = (2y)^5 = 2^5 y^5 = 32y^5$$

4) $\frac{x^p}{x^{p-1}} = x^{p-(p-1)} = x^{p-p+1} = x^{+1} = x$

قانون یازدهم

اگر قاعده های مساوی دارای توانهای مختلف باهم به حالت تقسیم باشند، طوریکه توان صورت از توان مخرج کوچکتر باشد به صورت 1 گذاشته از توان مخرج توان را تفریق می کنیم.

نوت: در حالت $a \leq n$ رابطه مذکور قطعاً قیوت شده نمی تواند.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad m < n$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون یازدهم ساده سازید.

1) $\frac{2^5}{2^5} = ?$

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

2) $\frac{(x^{-2})^{-1}}{x^3} = ?$

$$\frac{(x^{-2})^{-1}}{x^3} = \frac{x^{(-2)(-1)}}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x^{3-2}} = \frac{1}{x}$$

3) $\frac{(2y)^5 \div (2y)^3}{(2y)^4} = ?$

$$\frac{(2y)^5 \div (2y)^3}{(2y)^4} = \frac{(2y)^5}{(2y)^4} = \frac{(2y)^{5-3}}{(2y)^4} = \frac{(2y)^2}{(2y)^4} = \frac{1}{(2y)^{4-2}} = \frac{1}{(2y)^2} = \frac{1}{2^2 y^2} = \frac{1}{4y^2}$$

4) $(x^2)^{-3} \left(\frac{-1}{x}\right)^3 = ?$

$$(x^2)^{-3} \left(\frac{-1}{x}\right)^3 = x^{(2)(-3)} \left(\frac{-1^3}{x^3}\right) = x^{-6} \left(\frac{-1^3}{x^3}\right) = \frac{-x^{-6}}{x^3} = \frac{-1}{x^{3-(-6)}} = \frac{-1}{x^{3+6}} = -\frac{1}{x^9}$$

قانون دوازدهم

اگر دو افاده دارای قاعده و توان های مساوی باهم به حالت تقسیم قرار داشته باشند، حاصل تقسیم آنها 1 می باشد.

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad m = n$$

مثال ها:

افاده های زیر را بر اساس قانون دوازدهم ساده سازید.

1) $\frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{9}{9} = 1$

2) $\frac{(2x^3y)^9}{(2x^3y)^9} = ?$

$$\frac{(2x^3y)^9}{(2x^3y)^9} = (2x^3y)^{9-9} = (2x^3y)^0 = 1$$

قانون سیزدهم

هر عدد به توان برابر با کسری است که صورت آن کسر 1 و مخرج آن همان عدد با توان مثبت می باشد.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

یادداشت: در تطبیق قواعد توان ها امکان بروز اشتباهاتی ذیل وجود دارد

ممکن است تصور شود که روابطی نظیر $x^0 = 1$ و یا $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ را میتوانیم ثبوت کرد طوریکه

: $x^0 = x^{4-4} = \frac{x^4}{x^4} = 1$ و $x^{-3} = x^{2-5} = \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$ تأکید می شود که دو نمونه اثبات فوق کاذب

اند زیرا روابط فوق غیر قابل ثبوت می باشند بصورت عموم $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ فقط در حالت $m > n$ ثبوت شده می تواند و در حالت $m \leq n$ رابطه مذکور قطعاً ثبوت شده نمی تواند.

بنابر این مساوات های $x^0 := 1$ و $x^{-1} := \frac{1}{x}$ به حیث تعاریف تلفیقی پذیرفته می شود

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{a^{-m} \cdot a^m}{1 \cdot a^m} = \frac{a^{-m+m}}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{ثبوت:}$$

مثال ها: فاده های زیر را به اساس قانون سیزدهم ساده سازید.

$$1. \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^{+3}} = \frac{1}{8}$$

$$3. \quad \frac{2^3}{2^{10}} = 2^{3-10} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7}$$

$$2. \quad (2ab)^{-10} = \frac{1}{(2ab)^{+10}}$$

$$4. \quad 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{625}$$

نکته

توجه داشته باشید که ax^{-m} با $(ax)^{-m}$ فرق دارد یعنی:

$$1. \quad ax^{-m} = a \frac{1}{x^m} = \frac{a}{x^m}$$

$$2. \quad (ax)^{-m} = a^{-m} x^{-m} = \frac{1}{a^m x^m} = \frac{1}{(ax)^m}$$

قانون چهاردهم

اگر یک کسر دارای توان منفی باشد، درینصورت جای های صورت و مخرج را عوض نموده توان کسر

مثبت می شود.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

مثال ها: افاده های زیر را به اساس قانون چهاردهم ساده سازید.

$$1. \quad \left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{1}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$2. \quad \left(\frac{2a^2}{y}\right)^{-3} \left(\frac{y}{8a^4}\right)^{-1} = \left(\frac{y}{2a^2}\right)^3 \left(\frac{8a^4}{y}\right)^1 = \frac{y^3}{2^3(a^2)^3} \cdot \frac{8a^4}{y} = \frac{y^3}{8a^6} \cdot \frac{8a^4}{y} = \frac{y^2}{a^2}$$

قانون پانزدهم

هر عددی که از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت آورده شود علامه توان آن عدد تغییر می

نماید.

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$$

افاده های زیر را به اساس قانون پانزدهم ساده سازید.

مثال ها:

$$1. \quad \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = \frac{e^y}{e^x} = e^{y-x}$$

$$3. \quad \frac{4^{-3}}{16^{-2}} = \frac{16^2}{4^3} = \frac{(16)(16)}{(4)(4)(4)} = \frac{256}{64} = 4$$

$$2. \quad \frac{2^{-4}}{3^{-2}} = \frac{3^{+2}}{2^{+4}} = \frac{9}{16}$$

$$4. \quad \frac{-2^{-2}a^{-3}b^{-2}c^2}{16^{-1}ab^{\frac{1}{2}}} = \frac{-16c^2}{2^2aa^3b^2b^{\frac{1}{2}}} = \frac{-16c^2}{4a^{1+3}b^{2+\frac{1}{2}}} = -\frac{4c^2}{a^2b^{\frac{5}{2}}}$$

مثال‌ها:

مثال ۱: حاصل $A = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{1385}$

را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^2 + 2^2 = 2 \times 2^2 = 2^3$$

$$2^3 + 2^3 = 2 \times 2^3 = 2^4$$

⋮

حل:

$$A = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1385}$$

$$= 2^4 + 2^4 + \dots + 2^{1385} = \dots = 2^{1385} + 2^{1385}$$

$$= 2^{1385} \times 2 = 2^{1386}$$

مثال ۲: نشان دهید که عدد $A = 27^5 + 3^{12}$ بر 28 پوره قابل تقسیم است

$$A = 27 \times (27)^4 + 3^{12} = 27 \times (3^3)^4 + 3^{12}$$

$$= 27 \times 3^{12} + 3^{12} = (27 + 1) \times 3^{12} = 28 \times 3^{12}$$

بنابراین A مضربی از 28 است که در نتیجه بر 28 پوره قابل تقسیم است

مثال ۳: از دو عدد 2^{400} و 5^{200} کدام یکی بزرگتر از دیگری است ؟

$$2^{400} = (2^2)^{200} = 4^{200}$$

حل:

بنابراین، عدد 5^{200} از عدد 4^{200} یعنی عدد 2^{400} بزرگتر است.

مثال ۴: مطلوب است محاسبه عبارت $(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}}$.

$$(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}} = [(\frac{3}{2})^{-2}] = (\frac{3}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

حل:

مثال ۵: نشان دهید کسر زیر برابر واحد است.

$$A = \frac{(a^3 b^{-2} c^4)^4 b^{18}}{(a^2 b^3)^3 (a^{-1} b^{-1})^{-1} a^5 c^{16}}$$

$$A = \frac{a^{12} b^{-8} c^{16} b^{18}}{a^6 b^9 a b a^5 c^{16}} = \frac{a^{12} b^{10} c^{16}}{a^{12} b^{10} c^{16}} = 1$$

حل:

مثال ها:

مثال ۶: مقدار x را چنان بیابید که تساوی $2^{2x+1} + 4^{x+2} + 2 = 74$ برقرار شود.

$$2^{2x} \times 2 + (2^2)^x \times 4^2 + 2 = 74$$

$$2^{2x} (2+16) = 74 - 2 \Rightarrow 2^{2x} = \frac{72}{18} = 4 = 2^2$$

حل:

بنابر این $2x = 2$ و در نتیجه $x = 1$.

مثال ۷: مقدار x را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$3 \times 9 \times 27 \times 81 \times 3^{2x} - 3^{2x} + 9 = 2 \times 3^{19}$$

$$3 \times 3^2 \times 3^4 \times 3^{2x} - 3^{2x} + 9 = 2 \times 3^{19}$$

$$3 \times 3^{2x+9} - 3^{2x+9} = 2 \times 3^{19} \Rightarrow 3^{2x} + 19 = 3^{19}$$

$$2x + 9 = 19 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

حل:

لذا باید داشته باشیم

$$\text{مثال ۸: حاصل عبارت } A = (1 - \frac{1}{2})^3 (1 - \frac{1}{3})^3 (1 - \frac{1}{4})^3 \text{ را بیابید}$$

$$A = \left((1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \right)^3 = \left(\frac{1}{4} \right)^3 = \frac{1}{64}$$

حل:

$$\text{مثال ۹: افاده } \frac{(21)^{10} (8)^5 (18)^3}{(12)^4 (27)^4 (28)^8} \text{ را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید؟}$$

$$\frac{(21)^{10} (8)^5 (18)^3}{(12)^4 (27)^4 (28)^8} = \frac{(3 \cdot 7)^{10} (2^3)^5 (2 \cdot 3^2)^3}{(2^2 \cdot 3)^4 (3^3)^4 (2^2 \cdot 7)^8}$$

$$= \frac{3^{10} \cdot 7^{10} \cdot 2^{15} \cdot 2^3 \cdot 3^6}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 3^{12} \cdot 2^{16} \cdot 7^8} = \frac{2^{18} \cdot 3^{16} \cdot 7^{10}}{2^{24} \cdot 3^{16} \cdot 7^8}$$

حل:

$$= 2^{18-24} \cdot 3^{16-16} \cdot 7^{10-8} = 2^{-6} \cdot 3^0 \cdot 7^2 = \frac{7^2}{2^6} = \frac{49}{64}$$

$$\text{مثال ۱۰: افاده } (12 \cdot 8)^{-2} (30 \cdot 15)^2 (10)^{-3} \text{ را به ساده ترین شکل ممکن تبدیل کنید}$$

$$(12 \cdot 8)^{-2} (3 \cdot 15)^2 (10)^{-3}$$

$$= (3 \cdot 2^2 \cdot 2^3)^{-2} (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5)^2 (2 \cdot 5)^{-3}$$

$$= (3 \cdot 2^5)^{-2} (2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)^2 (2 \cdot 5)^{-3}$$

$$= 3^{-2} \cdot 2^{-10} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}$$

$$= 3^{-2+4} \cdot 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-3}$$

حل:

مثال ها:

مثال ۱۱: مقدار a و b را از رابطه $2^a \cdot 3^b = \frac{(18)^5 (12)^2 (96)^3}{(36)^7 (24)^3 (72)^8}$ بدست آورید

حل: $a = -30$ $b = -18$

$$\frac{(-1)^4 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^2}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot (-1^4)}$$

مثال ۱۲: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$\frac{(-1)^4 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^2}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot (-1^4)} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot 1}{\frac{1}{16} \cdot 16 \cdot (-1)} = \frac{-1}{1} = 1$$

حل:

مثال ۱۳: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$\begin{aligned} & [- [(-1)^{101} - (-1)^{100}] - 1]^{101} \\ & [- [(-1)^{101} - (-1)^{100}] - 1]^{101} = [- [-1 - (-1) - 1]]^{101} = [- [-1 + 1 - 1]]^{101} \\ & = [- [-1]]^{101} = 1^{101} = 1 \end{aligned}$$

حل:

مثال ۱۴: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$\frac{3^8 + 3^8 + 3^8}{9^4 + 9^4 + 9^4} = \frac{3 \cdot 3^8}{3 \cdot 9^4} = \frac{3^8}{(3^2)^4} = \frac{3^8}{3^8} = 3^{8-8} = 3^0 = 1$$

حل:

$$\frac{5^{x-1} + 5^{x+1}}{5^{x+1} - 5^{x-1}}$$

مثال ۱۵: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$\frac{5^{x-1} + 5^{x+1}}{5^{x+1} - 5^{x-1}} = \frac{5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^1}{5^x \cdot 5^1 - 5^x \cdot 5^{-1}} = \frac{5^x \cdot (\frac{1}{5} + 5)}{5^x (5 - \frac{1}{5})} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$$

حل:

مثال ۱۶: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$(x^{-3})^{-3} \cdot (-x)^{-6} \cdot (-x)^{-4} = x^9 \cdot x^{-6} \cdot x^{-4} = x^{9-6-4} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

حل:

$$\frac{6^4 \cdot 15^5 \cdot 21^6}{14^6 \cdot 10^5 \cdot 27^5}$$

مثال ۱۷: افاده ذیل را به شکل ساده بنویسید.

$$\frac{6^4 \cdot 15^5 \cdot 21^6}{14^6 \cdot 10^5 \cdot 27^5} = \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 \cdot (3 \cdot 7)^6}{(2 \cdot 7)^6 \cdot (2 \cdot 5)^5 \cdot (3^3)^5}$$

حل:

$$= \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 3^6 \cdot 7^6}{2^6 \cdot 7^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 3^{15}} = \frac{2^4 \cdot 3^{15} \cdot 5^5 \cdot 7^6}{2^{11} \cdot 7^6 \cdot 5^5 \cdot 3^{15}} = \frac{2^4}{2^{11}} = 2^{-7} = \frac{1}{128}$$

تمرین

1. حاصل عبارت $A = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{1385}$

2. حاصل عبارت $A = 25^5 + 5^6 \times 5^{11} - 4 \times 5^{12} - 5^{10}$

3. به ازای چه مقادیری از x تساوی زیر برقرار است؟

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x^5 - \frac{2}{3}} \times 7^{x^5 - 4} = 1$$

4. عبارات زیر را ساده کنید.

1. $2\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4}$, $x < 0$

2. $\frac{(-y)^{-2} \cdot x^3}{(-x^{-2} \cdot y)^{-3} \cdot x^{-2}}$, $xy \neq 0$

5. اگر $A = x^{\frac{t+1}{t}}$ و $B = x^{\frac{1}{t+1}}$ که $T \neq 0$ باشد، چه رابطه‌ای بین B و A برقرار است؟

6. اگر $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^2 را به دست آورید.

7. عبارات زیر را ساده کنید.

1. $5\sqrt{9} + \sqrt{(-4)^2} - 4\sqrt{(-3)^2}$

2. $4\sqrt{(0.01)^2} - 4\sqrt{(-0.01)^2} - 20\sqrt{\frac{1}{100}}$

3. $\sqrt{1 - \frac{16}{9}} - \sqrt{\left(-\frac{5}{9}\right)^2}$

8. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد بنویسید.

1. $\frac{2400^{15} \div 12^{22}}{150^3 \div 6^6}$ 2. $\frac{4^{25} + 2^{48}}{4^{24} + 2^{46}}$

3. $2^5 \times 5^{-5} \times 2^{10} \times 5^{-10} \times \dots \times 2^{100} \times 5^{-100}$

9. دو عدد 2^{33} و 3^{23} را باهم مقایسه کنید.

10. کوچکترین عددی که باید در عدد 5400 ضرب شود تا مربع کامل از آن بسازد، چیست؟

11. نصف، مربع و ربع عدد 8^{32} را محاسبه کنید.

12. اگر $2^a = 3$ و $3^b = 2$ باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

1. $2^{-ab} + ab$

2. $2^{ab} + 3^{ab}$

13. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \times 2^{4y} + 12 \\ 8^{x-y+1} = 25 \end{cases}$$

14. تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه $2k$ عضوی از تعداد زیر مجموعه های یک

مجموعه k عضوی، 991 واحد بیشتر است. مقدار k را تعیین کنید.