

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش مدارهای الکتریکی ۱

فصل سوم: روش های آنالیز

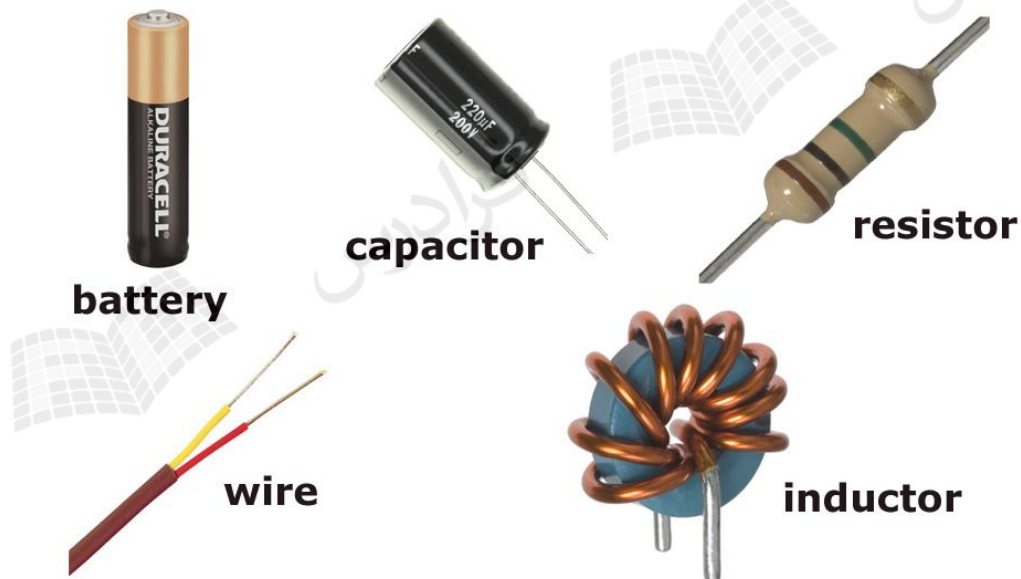
مدرس:

امید زندی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق گرایش کنترل

دانشگاه علم و صنعت ایران

روش‌های آنالیز



روش‌های آنالیز

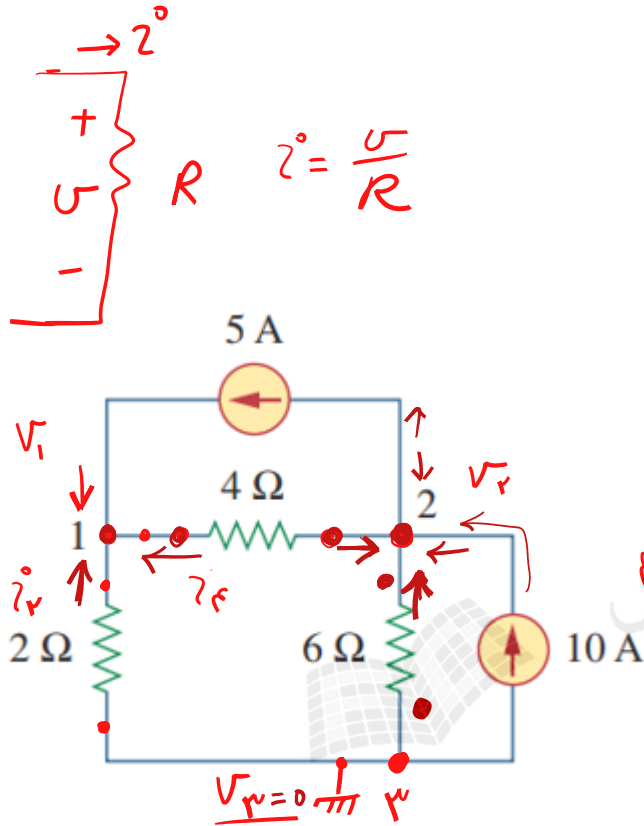
آنالیز گره

- متغیر مدار ولتاژ گره‌های مدار است.
- یک گره به دلخواه به عنوان مرجع شناخته می‌شود.
- ولتاژ سایر **گره‌ها** (**نه شاخه‌ها**) را اسم‌گذاری می‌کنیم.
- برای همه گره‌ها قانون KCL را می‌نویسیم.
- از حل همزمان معادلات ولتاژ گره‌ها بدست می‌آید.

روش‌های آنالیز

مثال - ولتاژ گره‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.

$$V_3 = 0 \text{ V}$$



متغیرها: V_1 و V_2

KCL: $\omega + i_2 + i_3 = 0$
 قانون اهم $i = \frac{\Delta V}{R}$

$$\rightarrow \begin{cases} i_2 = \frac{V_2 - V_1}{4} \\ i_3 = \frac{0 - V_2}{6} \end{cases} \checkmark$$

$$\Rightarrow \omega + \left(\frac{V_2 - V_1}{4} \right) + \left(\frac{0 - V_2}{6} \right) = 0$$

$$20 + (V_2 - V_1 - 2V_2) = 0$$

$$(3V_1 - V_2 = 20)$$

روش‌های آنالیز

$$KCL: \quad (-i_0 + i_0 + \left(\frac{v_1 - v_2}{\varepsilon} + \frac{0 - v_2}{\rho} \right)) = 0$$

$$i_0 + (3v_1 - 3v_2 - 2v_2) = 0$$

$$R_1 \begin{cases} -3v_1 + 5v_2 = i_0 \end{cases}$$

$$R_2 \begin{cases} 3v_1 - v_2 = 2i_0 \end{cases}$$

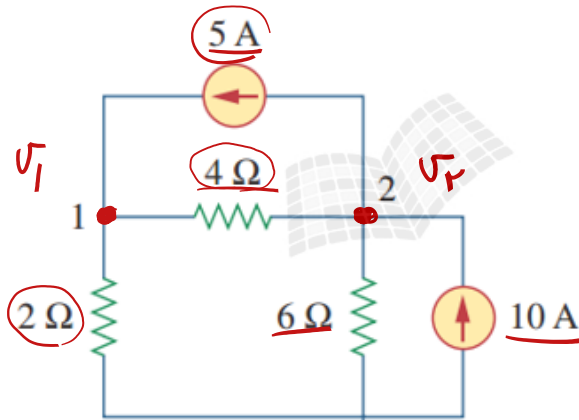
$$R_1 + R_2 \Rightarrow 4v_2 = i_0 \Rightarrow v_2 = \frac{i_0}{4} = 2.5v$$

$$3v_1 - 2i_0 = 2i_0 \Rightarrow 3v_1 = 4i_0 \Rightarrow v_1 = \frac{4i_0}{3} = \frac{20}{3}v$$

$$v_1 = \frac{\varepsilon_0}{3} v$$

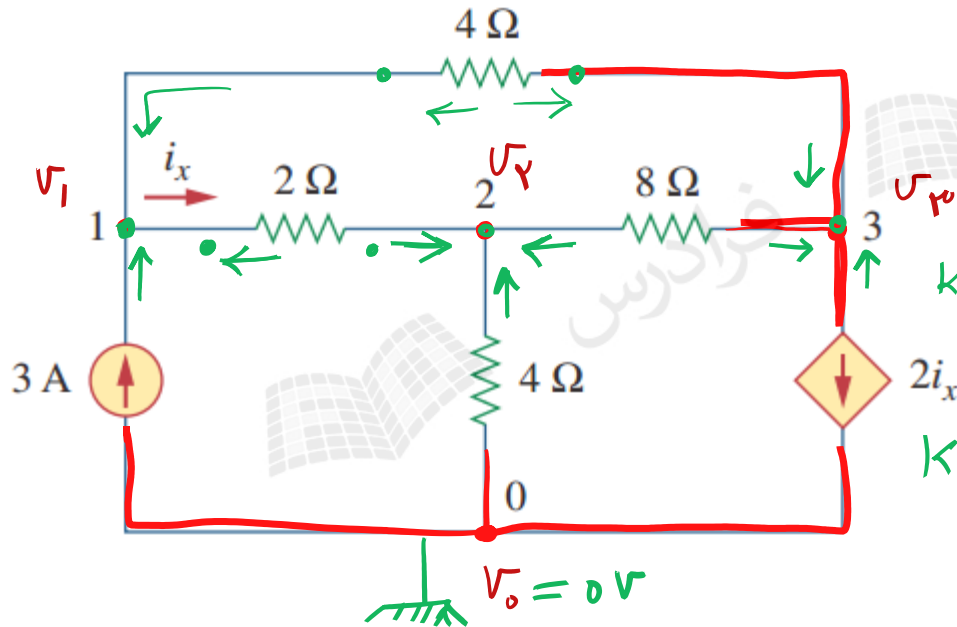
روش‌های آنالیز

$$\begin{cases} \frac{V_1 - V_2}{4} + \frac{V_1}{2} = 5 \\ \frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2}{6} = 10 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) V_1 - \frac{1}{4} V_2 = 5 \\ -\frac{1}{6} V_1 + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) V_2 = 10 - 5 \end{cases}$$



روش‌های آنالیز

مثال - ولتاژ گره‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



$$KCL_1: 3 + \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_3 - V_1}{4} = 0$$

$$KCL_2: \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{0 - V_2}{4} + \frac{V_3 - V_2}{8} = 0$$

$$KCL_3: \left(\frac{V_1 - V_3}{4} + \frac{V_2 - V_3}{8} - 2i_x \right) = 0$$

$$2i_x = \frac{V_1 - V_2}{2} \Rightarrow 2i_x = V_1 - V_2$$

روش‌های آنالیز

$$\begin{cases} 12 + 2V_r - 2V_1 + V_3 - V_1 = 0 \\ 4V_1 - 4V_r - 2V_2 + V_3 - V_2 = 0 \\ 2V_1 - 2V_3 + V_r - V_3 + 11V_2 - 11V_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_1 - 2V_r - V_3 = 12 \\ 4V_1 - 7V_r + V_3 = 0 \\ -6V_1 + 9V_r - 2V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2R_1 + R_3 &\rightarrow \begin{cases} 0V_1 + 5V_r - 5V_3 = 24 \\ 0V_1 - V_r - V_3 = 0 \end{cases} \\ \frac{2}{3}R_3 + R_r &\rightarrow \begin{cases} 0V_1 - V_r - V_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5V_3 - 5V_3 &= 24 \\ -10V_3 &= 24 \\ V_3 &= -2.4V \\ V_r &= +2.4V \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $V_r = -V_3$

روش‌های آنالیز

$$3V_1 - 2 \times 2,4 - (-2,4) = 12$$

$$3V_1 = 12 + 2,4 = 14,4 \Rightarrow V_1 = \frac{14,4}{3} = 4,8 \text{ V}$$

$$V_1 = 4,8 \text{ V} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ +2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش‌های آنالیز

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -7 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{12 \times (21 - 9)}{30}$$

* روش کرام

$$V_1 = \frac{12 \times 18}{30} = \frac{216}{10} = 21.6 \text{ V}$$

روش‌های آنالیز

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

* روش ساروس

$$|A| = \sum d_i - \sum C_i$$

$$|A| = d_1 + d_2 + d_3 - C_1 - C_2 - C_3$$

$$C_1 = ceg$$

$$C_2 = fha$$

$$C_3 = ibd$$

$$d_1 = aei$$

$$d_2 = dhc$$

$$d_3 = ghf$$

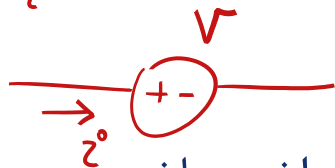
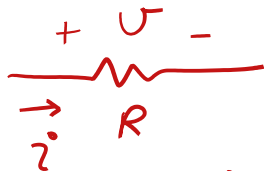
~~$$A^* = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$~~

روش‌های آنالیز

$$A^* = \begin{bmatrix} \mu & -\nu & -1 \\ \mu & -\nu & 1 \\ -\mu & \nu & -\mu \\ \mu & -\nu & -1 \\ \mu & -\nu & 1 \end{bmatrix}$$

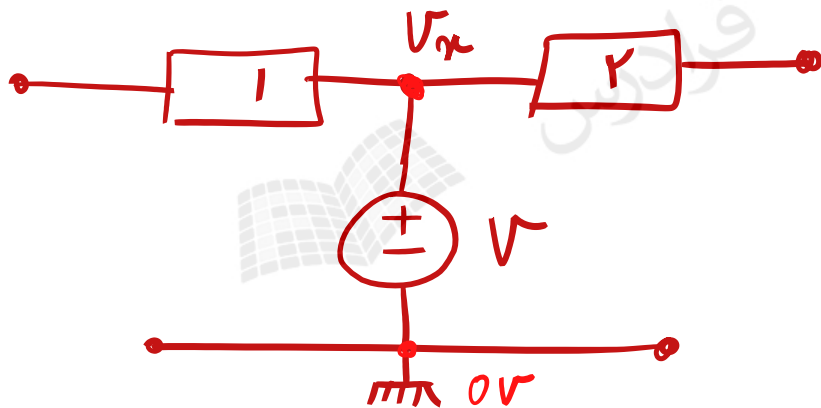
$d_1 = +4\mu$
 $d_2 = -\nu$

روش‌های آنالیز



آنالیز گره همراه با منابع ولتاژ

• حالت اول: منبع ولتاژ بین گره مرجع و یک گره غیر مرجع قرار داشته باشد.



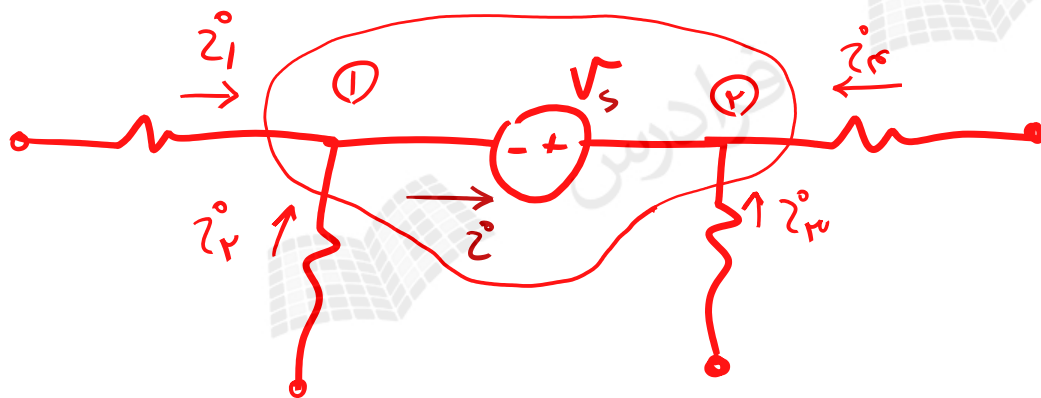
$$V_x - 0 = V$$

$$V_x = V$$

روش‌های آنالیز

آنالیز گره همراه با منابع ولتاژ

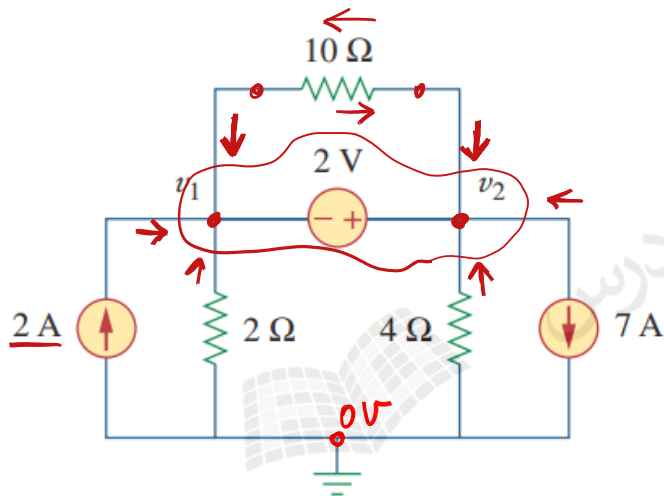
• حالت دوم : منبع ولتاژ بین دو گره غیر مرجع قرار داشته باشد.



$$\begin{cases} V_2 - V_1 = V_s \leftarrow \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0 \end{cases}$$

روش‌های آنالیز

مثال - ولتاژ گره‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



$$v_2 - v_1 = 2V$$

$$\left(\frac{0 - v_1}{2}\right) + 2 + \frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{0 - v_2}{4} - 7 + \frac{v_1 - v_2}{10} = 0$$

$$-2v_1 + 8 + (-v_2) - 28 = 0$$

$$\begin{cases} -2v_1 - v_2 = +20 \\ -v_1 + v_2 = 2 \end{cases}$$

$$-3v_1 = 22 \Rightarrow$$

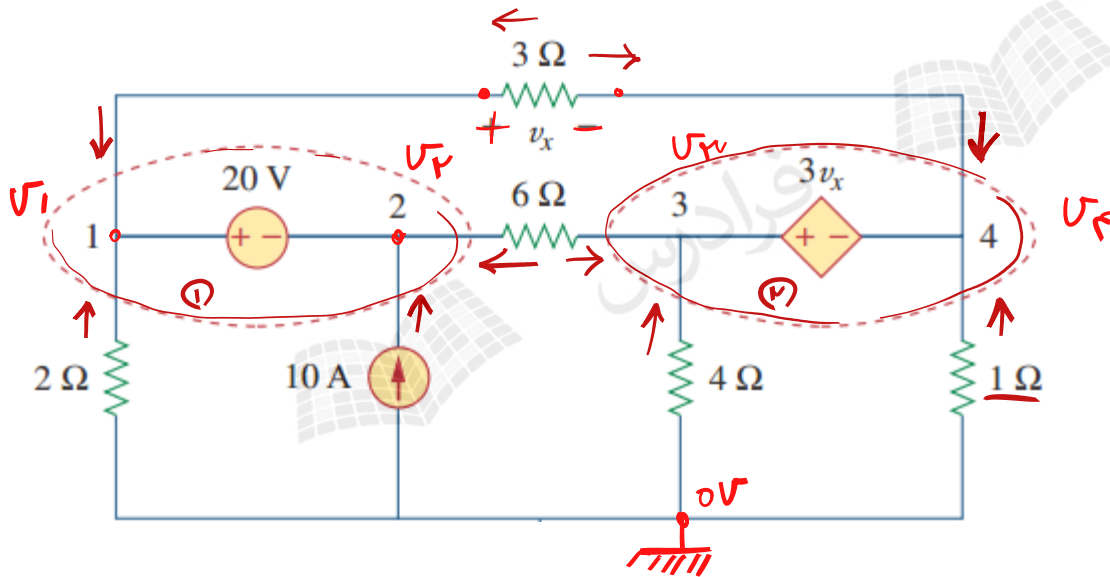
$$v_2 = v_1 + 2 = 2 - \frac{22}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$v_2 = -\frac{16}{3}V$$

$$v_1 = -\frac{22}{3}V$$

روش‌های آنالیز

مثال - ولتاژ گره‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



$$v_1 - v_2 = 20$$

$$v_3 - v_4 = 3v_x \\ = 3(v_1 - v_2)$$

$$v_3 - v_4 = 3v_1 - 3v_2$$

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0$$

روش‌های آنالیز

$$kel_1: \left(\frac{0 - V_1}{2} + \frac{V_4 - V_1}{3} + 10 + \frac{V_3 - V_2}{6} = 0 \right) \times 6$$

$$kel_2: \left(\frac{V_2 - V_3}{6} + \frac{0 - V_3}{8} + \frac{0 - V_4}{1} + \frac{V_1 - V_4}{3} = 0 \right) \times 12$$

$$-3V_1 + 2V_4 - 2V_1 + 60 + V_3 - V_2 = 0$$

$$2V_2 - 2V_3 - 3V_3 - 12V_4 + 8V_1 - 4V_4 = 0$$

$$\begin{cases} -5V_1 - V_2 + V_3 + 2V_4 = -60 \\ +4V_1 + 2V_2 - 5V_3 - 14V_4 = 0 \\ V_1 - V_2 + 0V_3 + 0V_4 = 20 \\ 3V_1 + 0V_2 - V_3 - 2V_4 = 0 \end{cases}$$

روش‌های آنالیز

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 & -14 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ +20 \\ 0 \end{bmatrix}}_B$$

$$A V = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} A}_I V = A^{-1} B \Rightarrow \boxed{V = A^{-1} B}$$

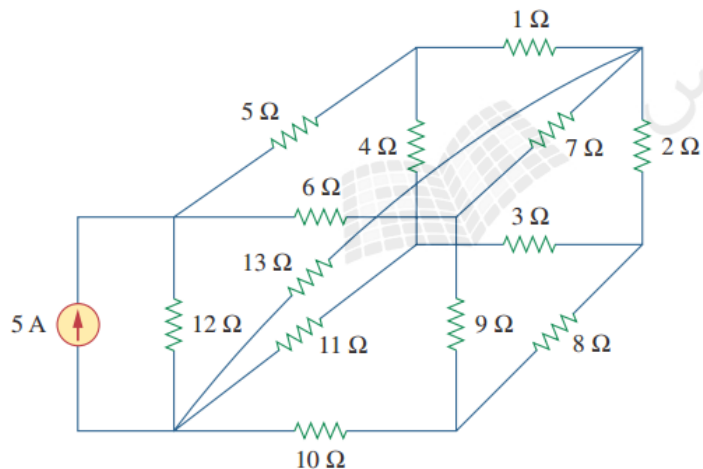
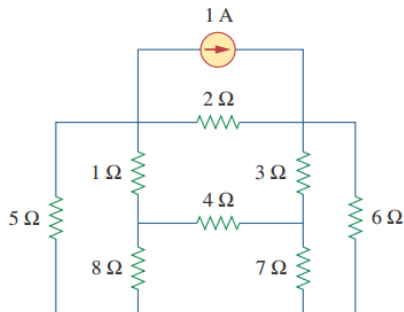
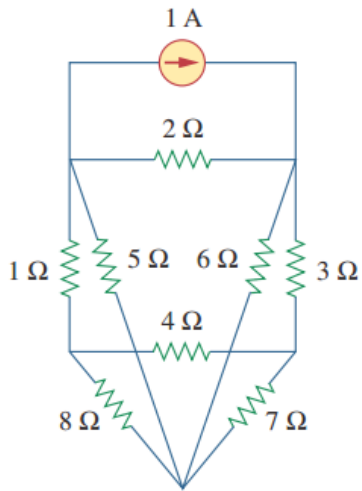
matlab

$$\boxed{v_1 = \frac{10}{3} V \quad v_2 = \frac{20}{3} V \quad v_3 = \frac{40}{3} V \quad v_4 = \frac{-140}{3} V}$$

روش‌های آنالیز

آنالیز مش

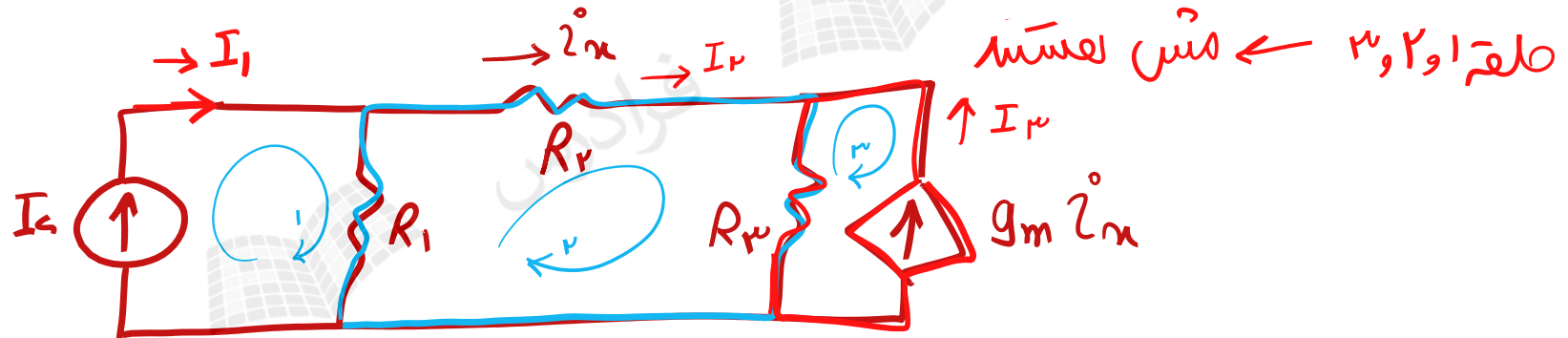
- متغیر مدار جریان مش‌ها است.
- برای آنالیز مدارات صفحه‌ای استفاده می‌شود.



روش‌های آنالیز

آنالیز مش

• مش حلقه‌ای است که در درون آن حلقه دیگری وجود نداشته باشد.



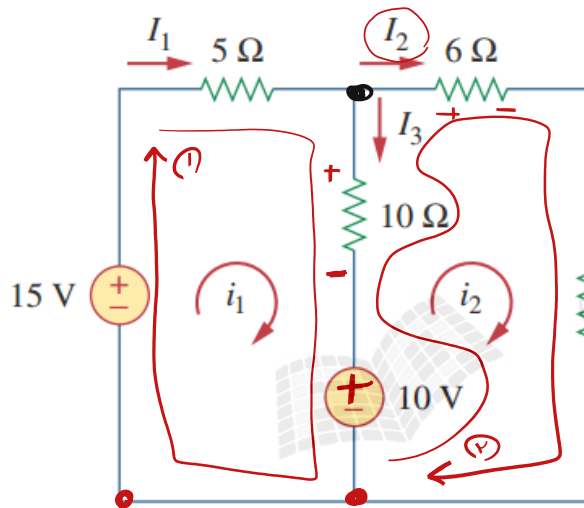
روش‌های آنالیز

آنالیز مش

- ✓ • تمام مش‌ها شناسایی شود.
- ✓ • جریان مش‌ها اسم گذاری شود (جهت جریان دلخواه است).
- قانون KVL برای تمام مش‌ها نوشته شود.
- معادلات بدست آمده برای محاسبه جریان مش‌ها حل شود.

روش‌های آنالیز

مثال - جریان مش‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



متغیرها I_1, I_r

$$\begin{aligned}
 \text{KVL: } & \begin{cases} -15 + 5I_1 + 10I_3 + 10 = 0 \\ -10 - 10I_3 + 4I_r + 4I_r = 0 \end{cases} \\
 \text{KCL: } & I_1 - I_r - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_r
 \end{aligned}$$

$$V_{4\Omega} = 4 \times I_r = 4V$$

$$\begin{cases} 10I_1 - 10I_r = +5 \\ -10I_1 + 20I_r = +10 \end{cases}$$

روش‌های آنالیز

$$2R_1 + R_2 \Rightarrow 20 I_1 = 20 \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A}$$

$$10 \times 1 - 10 I_2 = 0 \Rightarrow$$

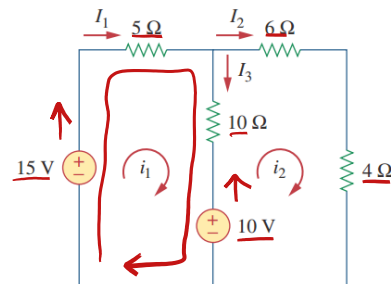
$$I_2 = 0 \text{ A}$$

$$10 = 10 I_2 \Rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

$$8 I_1 + 10(I_1 - I_2) = 10 - 10$$

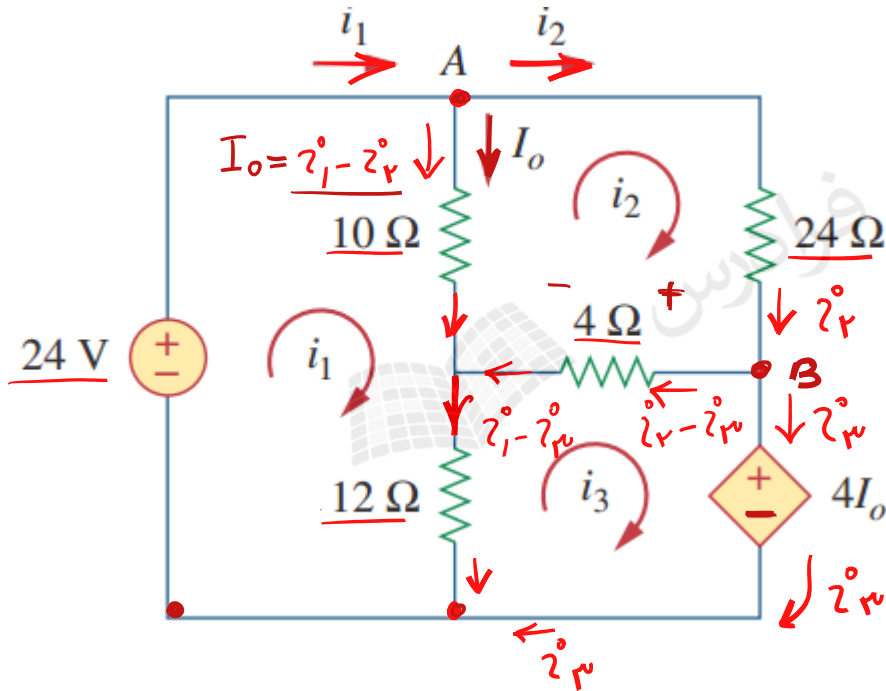
$$-10(I_1 - I_2) + 4 I_2 + 4 I_2 = +10$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 18 & -10 \\ -10 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \leftarrow$$



روش‌های آنالیز

مثال - جریان مش‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



$$\begin{aligned}
 -24 + 10(z_1 - z_2) + 12(z_1 - z_3) &= 0 \\
 24z_2 + 4(z_2 - z_3) - 10(z_1 - z_2) &= 0 \\
 4(z_2 - z_3) + 12(z_1 - z_3) - 4I_o &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 22z_1 - 10z_2 - 12z_3 = +24 \\
 -10z_1 + 34z_2 - 4z_3 = 0 \\
 12z_1 + 12z_2 - 16z_3 = 0
 \end{cases}$$

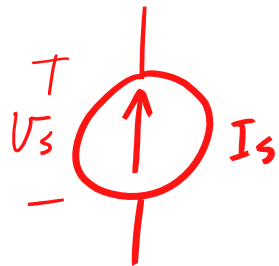
روش‌های آنالیز

$$\begin{bmatrix} 22 & -10 & -12 \\ -10 & 38 & -4 \\ 8 & 8 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & -10 & -12 \\ 0 & 38 & -4 \\ 0 & 8 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 22 & -10 & -12 \\ -10 & 38 & -4 \\ 8 & 8 & -16 \end{vmatrix}}$$

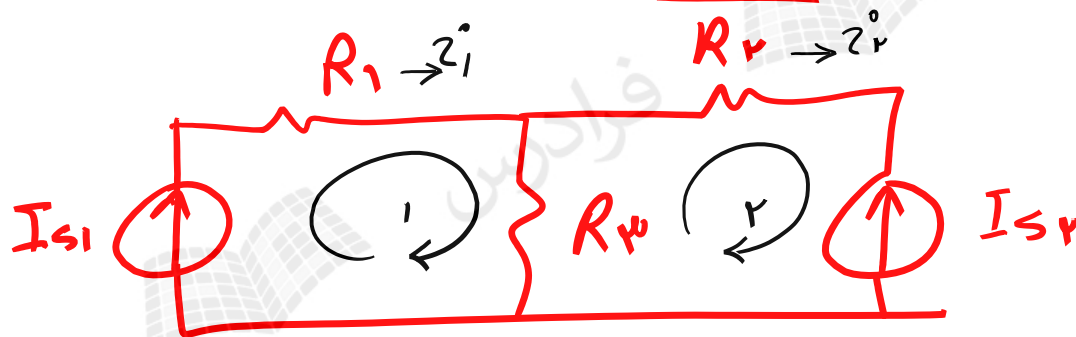
$$\begin{cases} z_1 = V_{\epsilon} = 2,20 \text{ A} \\ z_2 = \frac{2}{\epsilon} = 0,20 \text{ A} \\ z_3 = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ A} \end{cases}$$

روش‌های آنالیز



آنالیز مش همراه با منابع جریان

• حالت اول : منبع جریان تنها در یک مش قرار داشته باشد.

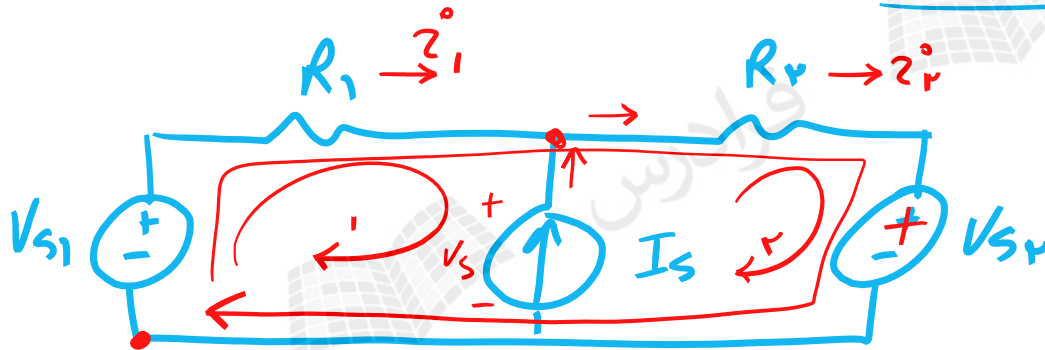


$$\begin{cases} z_1 = I_{s1} \\ z_2 = -I_{s2} \end{cases}$$

روش‌های آنالیز

آنالیز مش همراه با منابع جریان

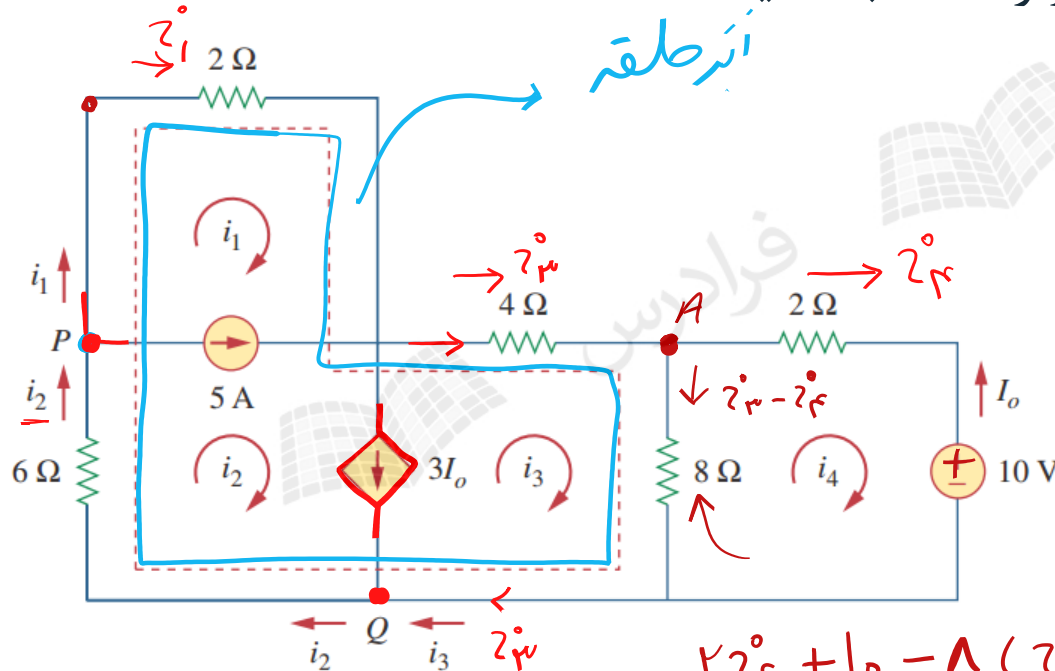
• حالت دوم : منبع جریان بین دو مش قرار داشته باشد.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Kcl: } i_1 + I_s = i_2 \\ \text{Kvl: } -V_{s1} + R_1 i_1 + R_2 i_2 + V_{s2} = 0 \end{array} \right\}$$

روش‌های آنالیز

مثال - جریان مش‌ها در مدار زیر را محاسبه کنید.



$$z_v = \omega + z_1 \rightarrow z_1 - z_v = -\omega$$

$$3I_o + z_v = z_1$$

$$-3z_v + z_v - z_v = 0$$

$$2z_1 + 4z_v + 1(z_v - z_v) + 3z_v = 0$$

$$2z_1 + 4z_v + 1z_v - 1z_v = 0$$

$$2z_v + 10 - 1(z_v - z_v) = 0 \Rightarrow 1z_v - 10z_v = 10$$

روش‌های آنالیز

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}}_B$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = A^{-1} B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} A \\ -\frac{2}{10} A \\ \frac{5}{10} A \\ \frac{1}{10} A \end{bmatrix}$$

روش‌های آنالیز

ما تدریس کردیم
↑

$$\begin{bmatrix} \underline{G_{11}} & \underline{G_{12}} & \dots & \underline{G_{1N}} \\ \underline{G_{21}} & \underline{G_{22}} & \dots & \underline{G_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{G_{N1}} & \underline{G_{N2}} & \dots & \underline{G_{NN}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \overbrace{v_1}^V \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{matrix} = \begin{matrix} \overbrace{i_1}^I \\ \textcircled{i_2} \\ \vdots \\ i_N \end{matrix}$$

آنالیز گره سریع

$$GV = I$$

$$V = G^{-1}I$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

G_{kk} = Sum of the conductances connected to node k

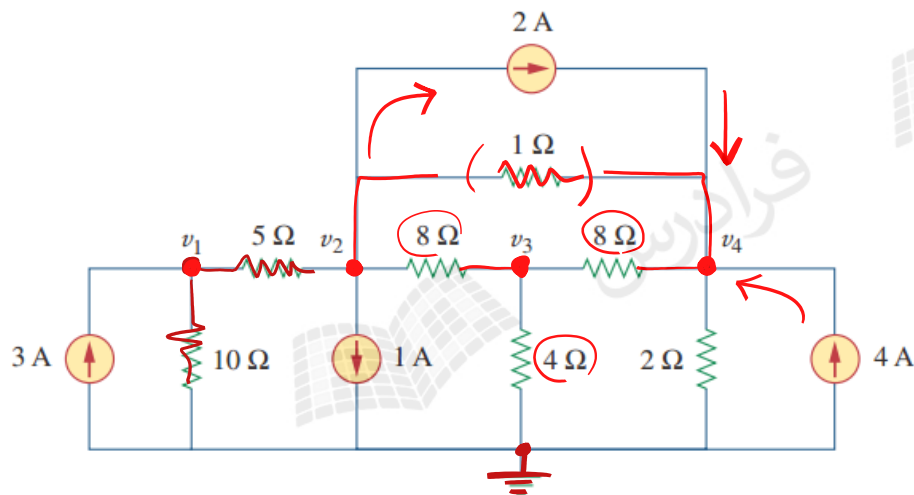
$G_{kj} = G_{jk}$ = Negative of the sum of the conductances directly connecting nodes k and j , $k \neq j$

v_k = Unknown voltage at node k

i_k = Sum of all independent current sources directly connected to node k , with currents entering the node treated as positive

روش‌های آنالیز

مثال – مدار زیر را با استفاده از روش گره سریع تحلیل کنید.



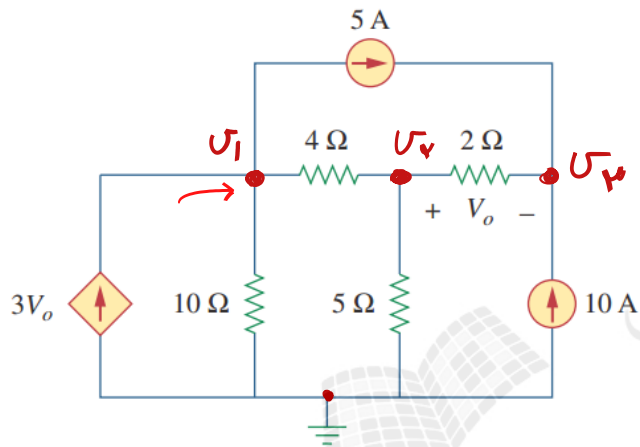
روش‌های آنالیز

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + 1 & -\frac{1}{8} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{8} & 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +12 \\ -1-2 \\ 0 \\ +2+3 \end{bmatrix}$$

ماتریس کانداتنس
 $(G_{ij} = G_{ji}) \rightarrow$ (مستقارن)

روش‌های آنالیز

مثال – مدار زیر را با استفاده از روش گره سریع تحلیل کنید.



$$V_o = v_2 - v_3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3V_o - 5 \\ 0 \\ 5 + 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

روش‌های آنالیز

ماتریس مقاومت

 R I V

آنالیز مش سریع

$$R I = V$$

$$I = R^{-1} V$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

قطری

R_{kk} = Sum of the resistances in mesh k $k = 1, \dots, N$

$R_{kj} = R_{jk}$ = Negative of the sum of the resistances in common with meshes k and j , $k \neq j$

غیرقطری

i_k = Unknown mesh current for mesh k in the clockwise direction

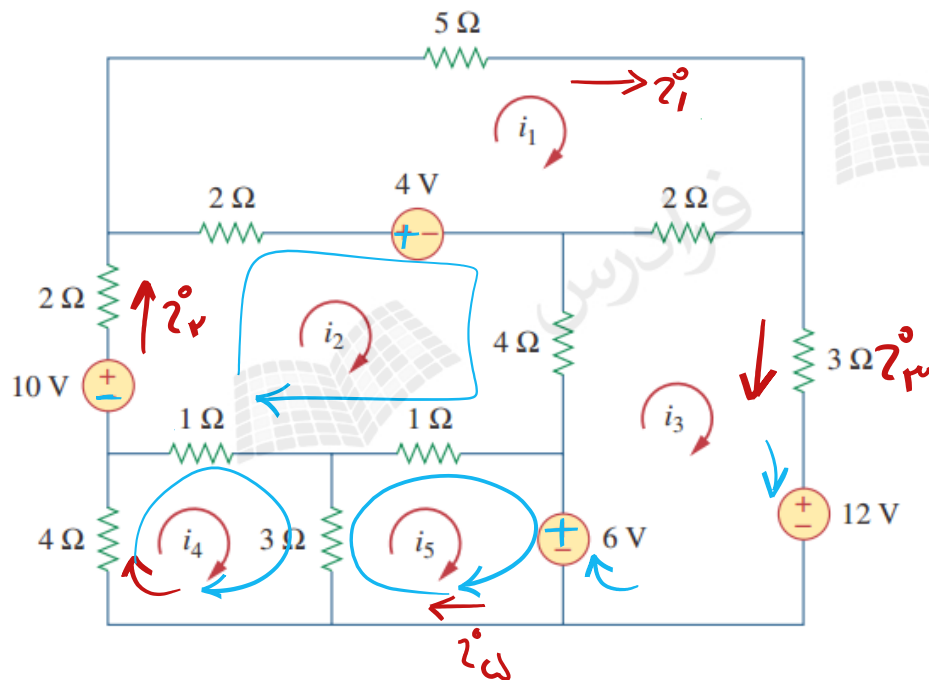
v_k = Sum taken clockwise of all independent voltage sources in mesh k , with voltage rise treated as positive

ساعتگرد $\rightarrow$ جهت جریان مثبت



روش‌های آنالیز

مثال - مدار زیر را با استفاده از روش مش سریع تحلیل کنید.

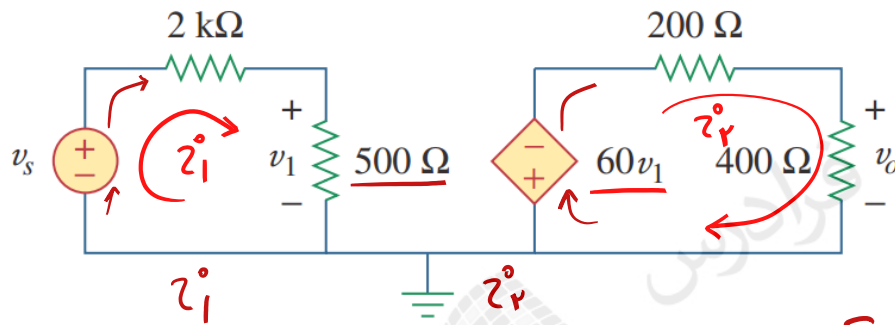


روش‌های آنالیز

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 s+2+2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\
 -2 & 2+s+1+1+2 & -2 & -1 & -1 \\
 -2 & -2 & 2+s+2 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1+2+2 & -2 \\
 0 & -1 & 0 & -2 & 1+2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Z_1 \\
 Z_2 \\
 Z_3 \\
 Z_4 \\
 Z_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 +2 \\
 10-2 \\
 4-12 \\
 0 \\
 -4
 \end{bmatrix}$$

روش‌های آنالیز

مثال - مدار زیر را با استفاده از روش مش سریع تحلیل کنید.



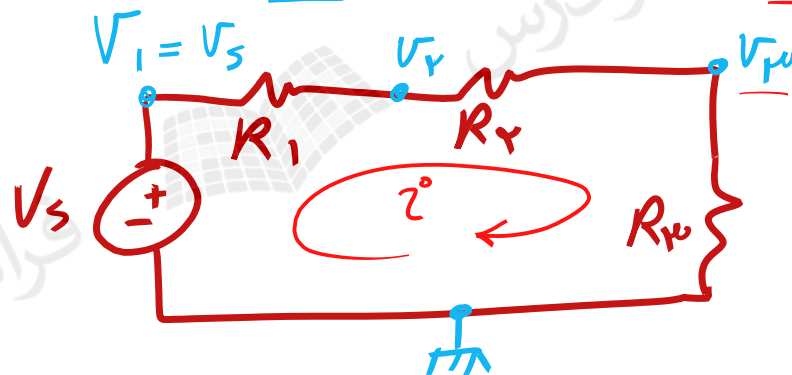
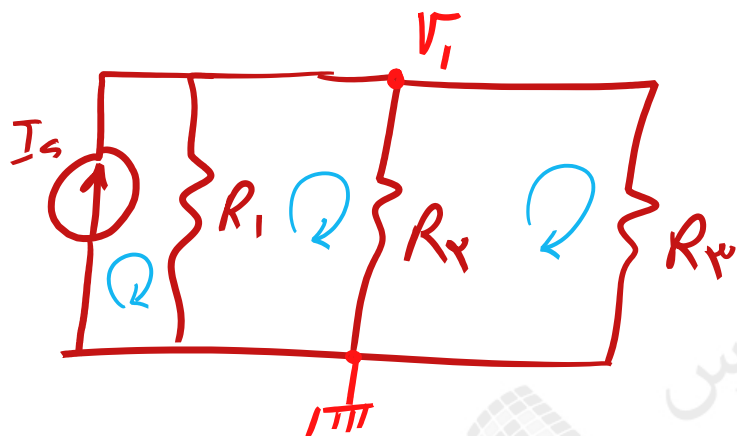
$$v_1 = 500 i_1$$

$$\begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 3000 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 3000 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ -400 i_1 = -400000 i_1 \end{bmatrix}$$

روش‌های آنالیز

آنالیز مش بهتر است یا آنالیز گره؟



این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش مدارهای الکتریکی ۱»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvee110