

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش مدارهای الکتریکی ۱

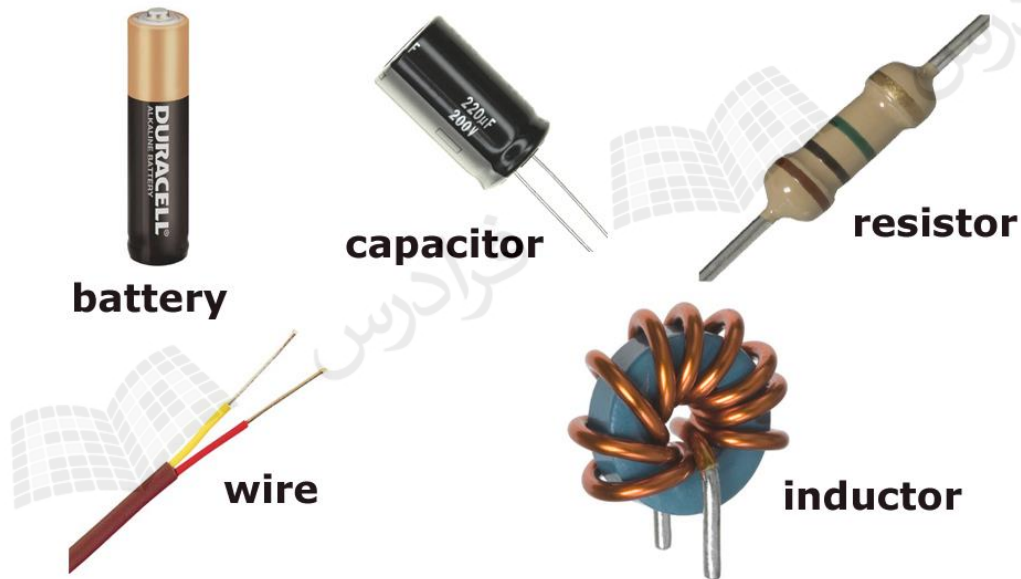
فصل هفتم: مدارهای مرتبه اول

مدرس:

امید زندی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق گرایش کنترل
دانشگاه علم و صنعت ایران

مدارهای مرتبه اول

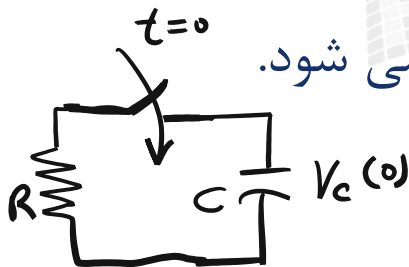


مدارهای مرتبه اول

$$\dot{x} + \alpha x = f(t)$$

مدار مرتبه اول (first-order circuit)

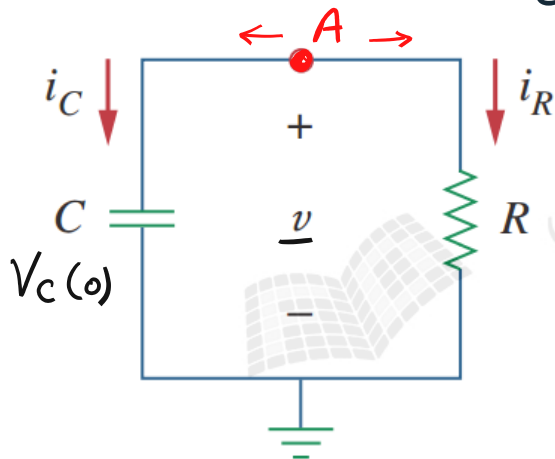
- مداری است که توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف می شود.
- شامل یک عنصر ذخیره کننده انرژی و سایر المان های بی حافظه است.
- مدارات RL و RC مهمترین و پایه ای ترین مدارات مرتبه اول هستند.
- تحلیل این مدارات در حالت های ورودی صفر و حالت صفر انجام می شود.



مدارهای مرتبه اول

پاسخ ورودی صفر مدار RC

- تحریک مدار از طریق انرژی اولیه ذخیره شده در خازن است.



$$\rightarrow \dot{v}_C + \dot{v}_R = 0$$

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0$$

$$\left(C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \right) \Rightarrow$$

$$\tau = RC$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{RC}$$

* ثابت زمانی

$$\underline{v_C = v_R = v}$$

مدارهای مرتبه اول

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{\tau} \Rightarrow \int \left(\frac{dV}{V} \right) = \int \left(-\frac{dt}{\tau} \right)$$

$$\int A dt = At + B$$

$$\ln V = -\frac{1}{\tau} t + K$$

$$e^{\ln V} = e^{-\frac{1}{\tau} t + K}$$

$$\Rightarrow V = e^{-\frac{t}{\tau}} (e^K)$$

$$\begin{cases} V(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V(0) = V_{C0} = V_C(0) \end{cases}$$

 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V_C(0) &= e^{-\frac{0}{\tau}} \times A = A \\ A &= V_C(0) = V_{C0} \end{aligned}$$

$$V(t) = V_C(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

مدارهای مرتبه اول

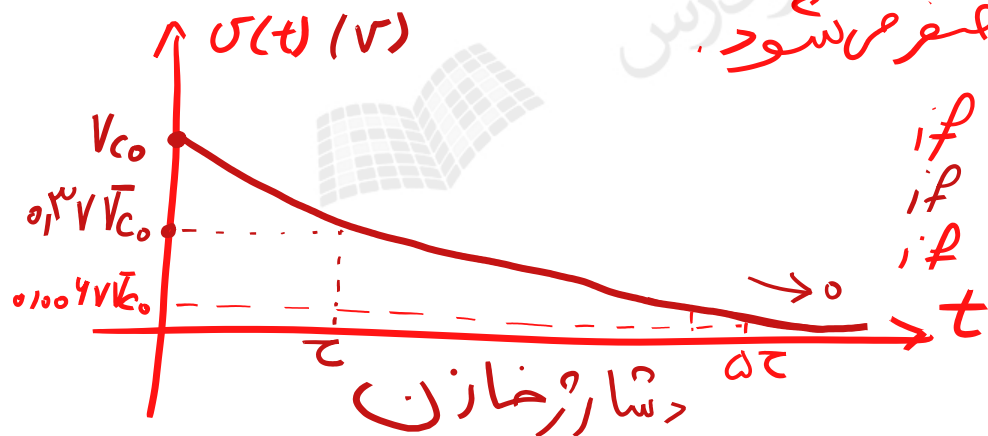
$$\dot{I}_R = \frac{V}{R} = \frac{V_{C_0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_R = -\frac{V_{C_0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

 $e > 1$

$$V(\infty) = V_{C_0} e^{-\frac{\infty}{\tau}} = V_{C_0} e^{-\infty} = 0$$

* در زمانهای بزرگ و τ ، خازن خالی می‌شود



$$\begin{aligned} \text{if } t = \tau &\Rightarrow V(t) = V_{C_0} e^{-1} = 0.37 V_{C_0} \\ \text{if } t = 5\tau &\Rightarrow V(t=5\tau) = V_{C_0} e^{-5} = 0.0067 V_{C_0} \\ \text{if } t \gg 5\tau &\rightarrow V(t) \approx 0 V \end{aligned}$$

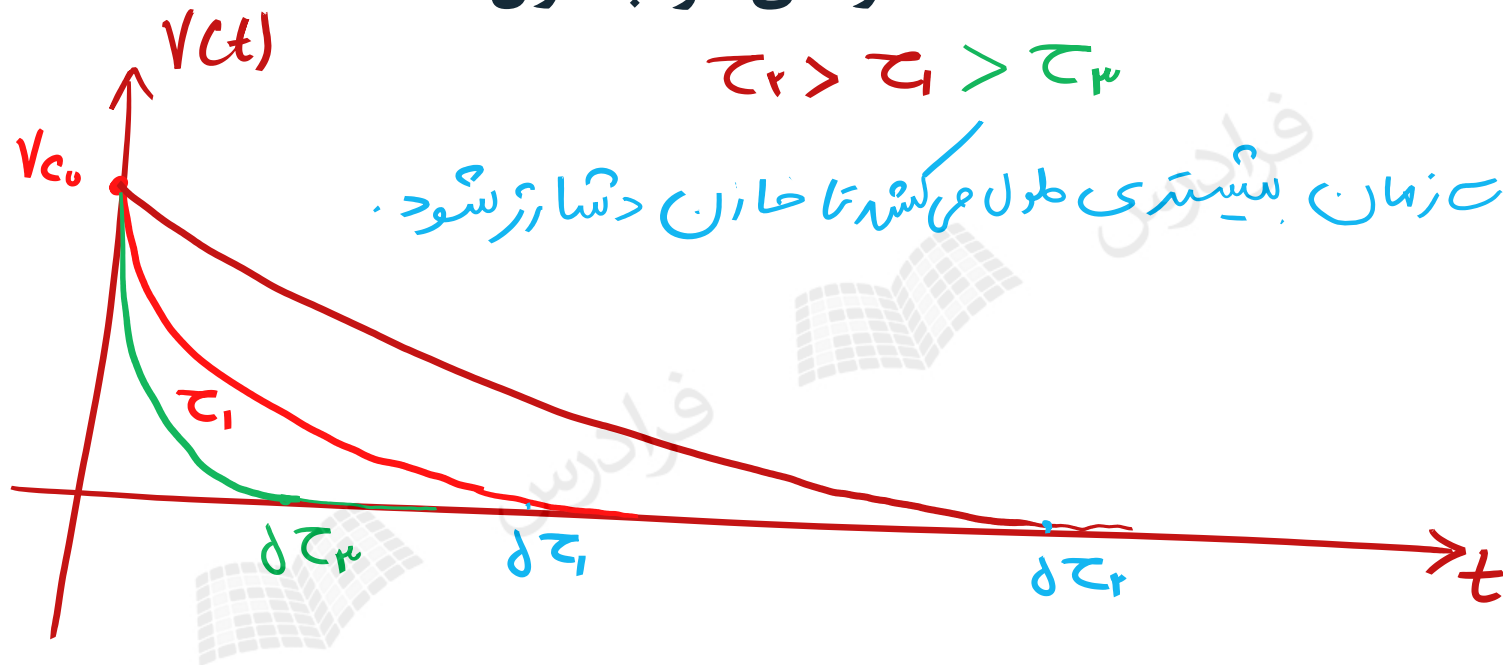
$$T_s = 5\tau$$

* زمان نشست

مدارهای مرتبه اول

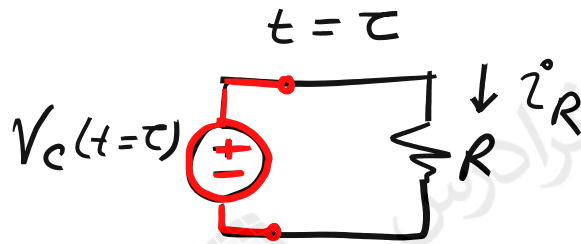
$$\tau_r > \tau_1 > \tau_3$$

* در زمان بیشتری طول می‌کشد تا خازن دشارژ شود.



مدارهای مرتبه اول

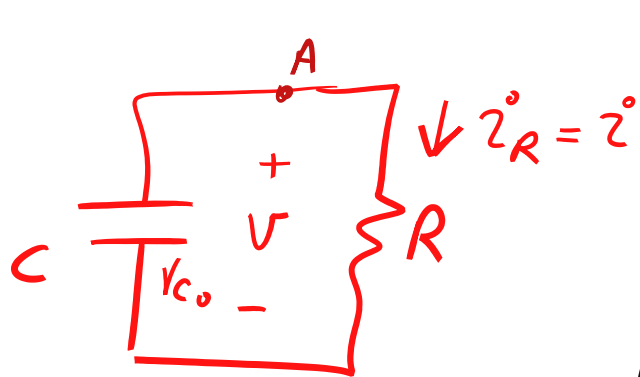
$$\begin{cases} i_R = \frac{V_{C_0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V(t) = V_{C_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$



$$t = \tau \longrightarrow \begin{cases} i_R = \frac{V_{C_0}}{R} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 0,37 \frac{V_{C_0}}{R} = \frac{V_C(t=\tau)}{R} \\ V(t) = V_{C_0} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 0,37 V_{C_0} \end{cases}$$

* در هر زمان می‌توان خازن را با یک منبع ولتاژ مستقل به اندازه ولتاژ خازن در همان لحظه جابجایی کرد.

مدارهای مرتبه اول



$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = 0 \quad \xrightarrow{V(0)}$$

$$i = \frac{V}{R} \Rightarrow V = Ri$$

$$\frac{d}{dt}(Ri) + \frac{1}{RC} \times (Ri) = 0$$

$$R \frac{d}{dt} i + \frac{1}{C} i = 0$$

$$\frac{d}{dt} i + \frac{1}{RC} i = 0 \quad \xrightarrow{i(0)}$$

فرم کلی

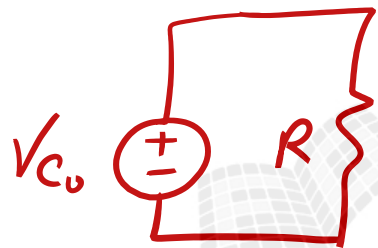
$$\frac{d}{dt} x + \frac{1}{\tau} x = 0$$

$x(0)$

مدارهای مرتبه اول

$$\rightarrow i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(0) = A e^0 = A$$



$$\downarrow i(0) = \frac{V_{C_0}}{R} = A$$

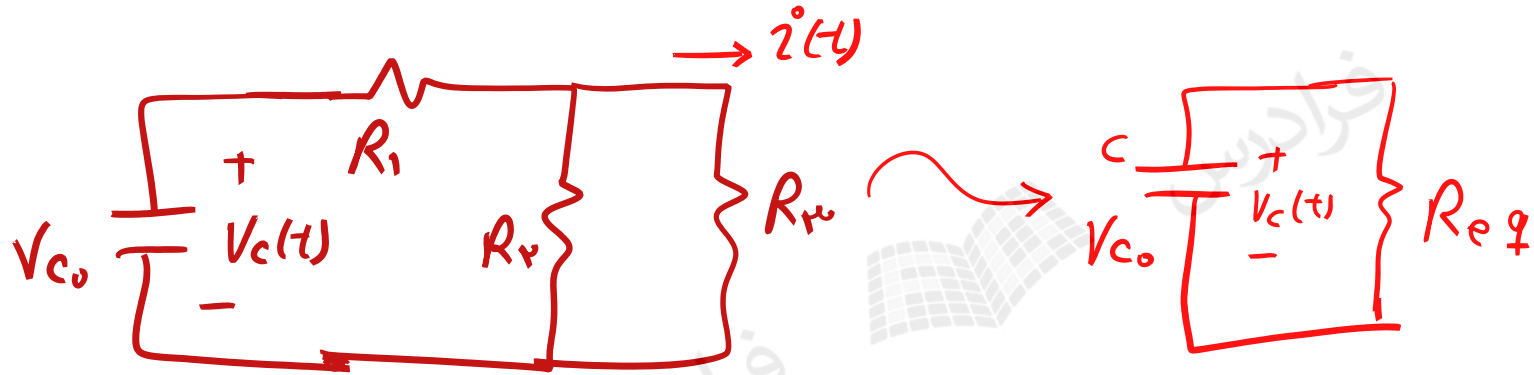
* مدار معادل در $t=0$

$$i(t) = \frac{V_{C_0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\begin{cases} \tau = RC \\ i(0) \end{cases}$$

* برای محاسبه $i(t)$ فقط نیاز به $i(0)$ و τ داریم.

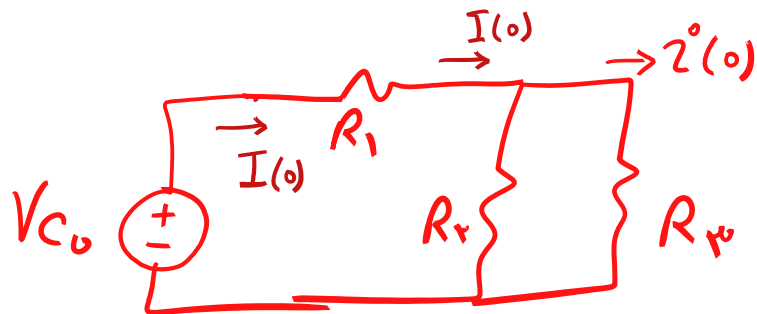
مدارهای مرتبه اول



$$R_{eq} = R_1 + R_r \parallel R_m$$

$$\tau = R_{eq} C \quad R_{eq} : \text{مقاومت دید شده در دو سر خازن}$$

مدارهای مرتبه اول

* مدار معادل در $t=0$

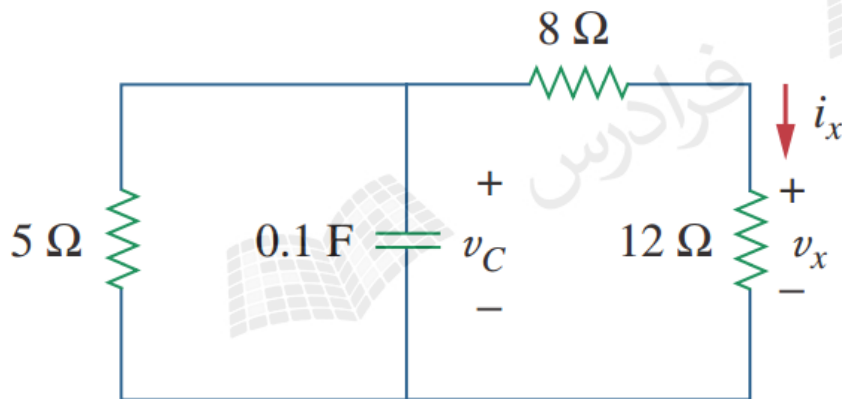
$$I(0) = \frac{V_{C_0}}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \Rightarrow I'(0) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I(0)$$

$$\begin{cases} i'(t) = i'(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \tau = (R_1 + R_2 \parallel R_3)C \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول

مثال - سیگنال های $\underline{v_c}$ ، $\underline{v_x}$ و $\underline{i_x}$ را برای زمان های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.

$$\underline{v_c(0)} = 15V$$

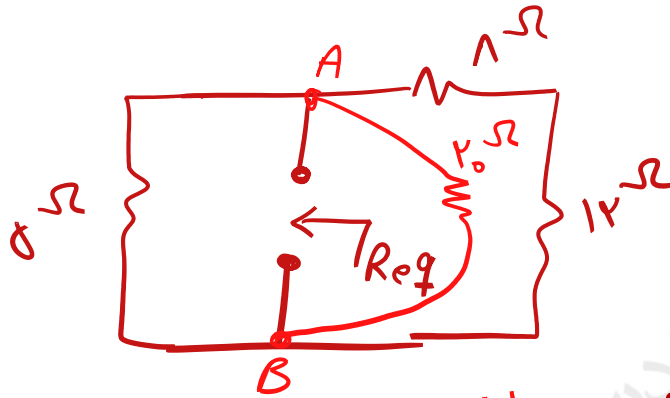


$$\begin{cases} v_c = v_{c0} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_x = v_{x0} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \\ i_x = i_{x0} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad t \gg 0$$

$$\tau = R_{eq} C$$

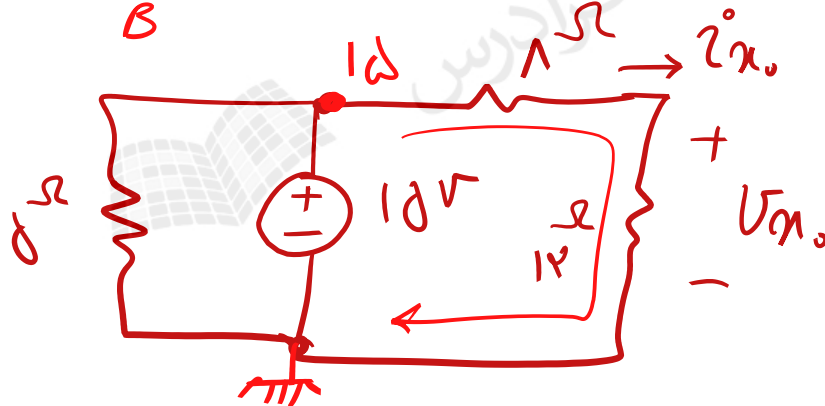
$$\begin{cases} v_c(t) = 15 e^{-\frac{t}{0.1\pi}} \\ v_x(t) = 9 e^{-\frac{t}{0.1\pi}} \\ i_x(t) = 0.175 e^{-\frac{t}{0.1\pi}} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول



$$R_{eq} = 20 \parallel 12 = \frac{20 \times 12}{20 + 12} = 7.5 \Omega$$

$$\tau = R_{eq} \times C = 0.1 \text{ s}$$



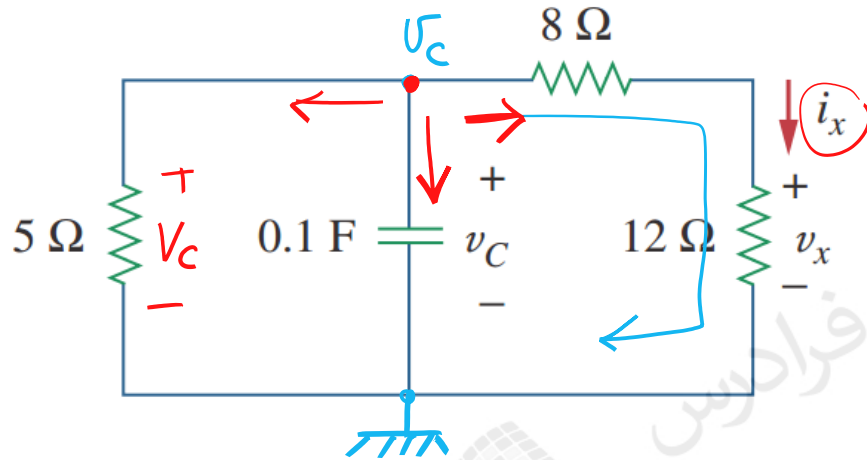
* مدار معادل در $t=0$

$$10 = (1 + 12) i_{20}$$

$$i_{20} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ A}$$

$$V_{th} = 12 i_{20} = 6 \text{ V}$$

مدارهای مرتبه اول



$$V_C = 11 i_n + 12 i_n$$

$$\rightarrow V_C = 20 i_n \leftarrow$$

$$KCL: \frac{V_C}{\omega} + 0.1 \frac{dV_C}{dt} + i_n = 0$$

$$\frac{20 i_n}{\omega} + 0.1 \times \frac{d}{dt} (20 i_n) + i_n = 0$$

$$2 i_n + 2 \frac{d}{dt} i_n + i_n = 0$$

$$\Rightarrow 2 \frac{d}{dt} i_n + 3 i_n = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} i_n(t) = -1.5 i_n$$

$$\frac{d i_n}{i_n} = -1.5 dt$$

مدارهای مرتبه اول

$$\ln z_{\alpha}^{\circ} = -\gamma_1 \omega t + A$$

$$e^{\ln z_{\alpha}^{\circ}} = e^{-\gamma_1 \omega t + A} \Rightarrow z_{\alpha}^{\circ} = e^{-\gamma_1 \omega t} e^A$$

$$z_{\alpha}^{\circ} = z_{\alpha}^{\circ} e^{-\gamma_1 \omega t} \xrightarrow{t=0} z_{\alpha}^{\circ}(0) = z_{\alpha}^{\circ}$$

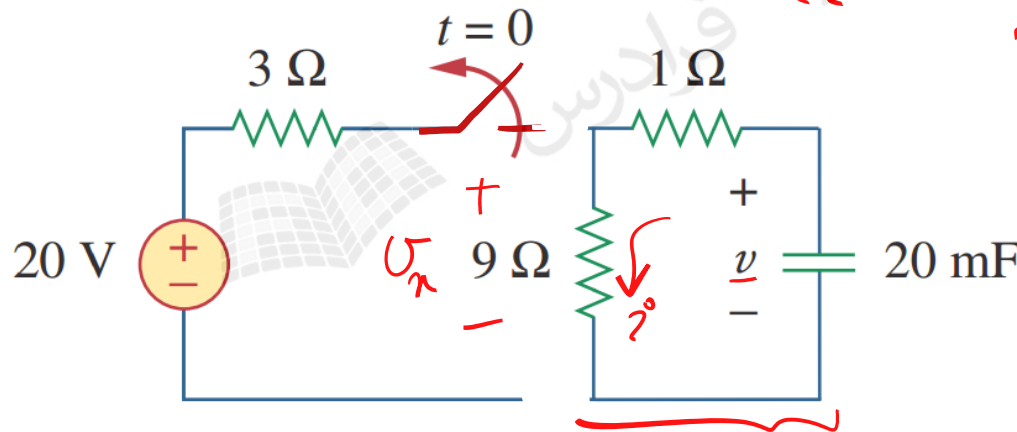
$$V_c(t) = \gamma_0 z_{\alpha}^{\circ}(t) \Rightarrow V_c(0) = \gamma_0 z_{\alpha}^{\circ}(0) = 1 \omega^v$$

$$z_{\alpha}^{\circ}(0) = \frac{1 \omega}{\gamma_0} = 0,17 \omega A$$

$$z_{\alpha}^{\circ}(t) = 0,17 \omega e^{-\gamma_1 \omega t} \Rightarrow z_{\alpha}^{\circ}(t) = 0,17 \omega e^{-\frac{t}{\frac{1}{\gamma_1 \omega}}} = 0,17 \omega e^{-\frac{t}{0,17}}$$

مدارهای مرتبه اول

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی بسته بوده است و در زمان صفر باز می شود. ولتاژ خازن را برای زمان های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



$$V_C(0^-) = 15V \leftarrow \text{در صیغ}$$

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 10V$$

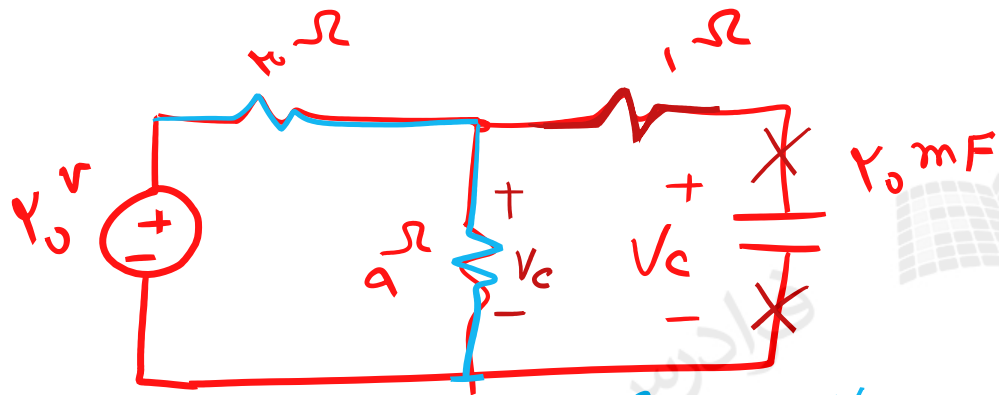
$$R_{eq} = 1 + 9 = 10\Omega$$

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 0.02 = 0.2s$$

$$V_C(t) = V_C(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_C(t) = 10 e^{-\frac{t}{0.2}} \quad t \geq 0$$

مدارهای مرتبه اول



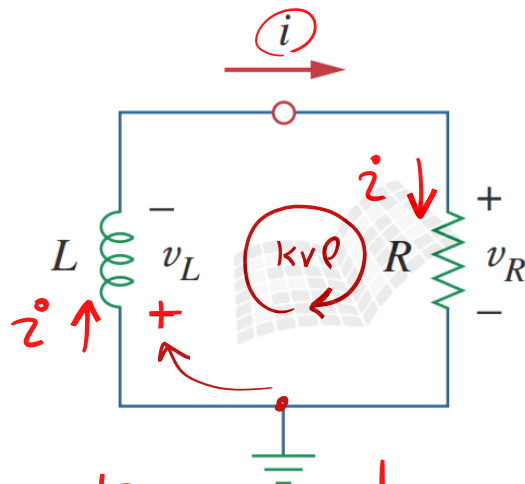
* زمان های منفی $t < 0$

$$V_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times V_0 = \frac{9}{9+1} \times 10 = 9V$$

مدارهای مرتبه اول

پاسخ ورودی صفر مدار RL

- تحریک مدار از طریق انرژی اولیه ذخیره شده در سلف است.



تایم زمانی $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$

$$v_L + v_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + K$$

$$i = A e^{-\frac{R}{L} t} = A e^{-\frac{t}{(\frac{L}{R})}}$$

↑ مدارهای مرتبه اول

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$t=0 \Rightarrow i(0) = A e^{-\frac{0}{\tau}} = A$$

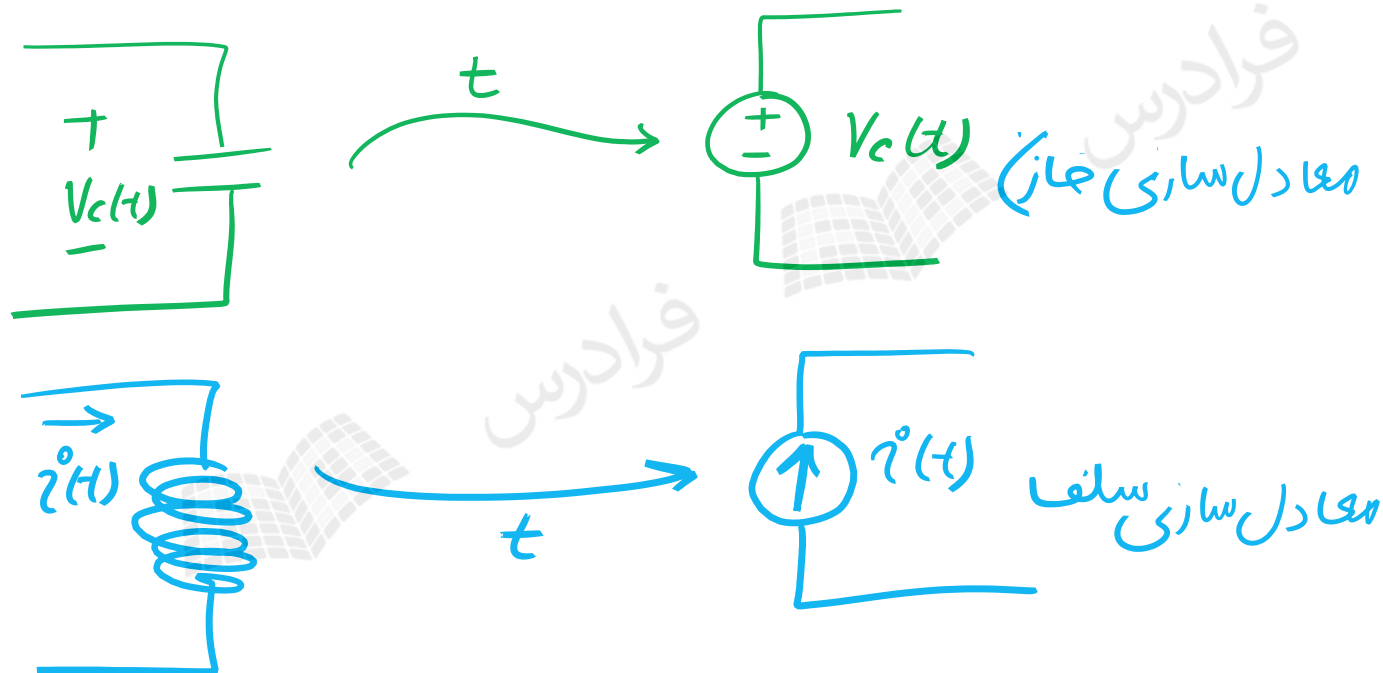
$$A = i_L(0)$$

$$i(t) = i_L(t) = i_R(t) = i_L(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_R(t) = R i(t) = \underbrace{R i_L(0)}_{V_R(0)} e^{-\frac{t}{\tau}} = V_R(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{کل} \Rightarrow x(t) = \underline{x(0)} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

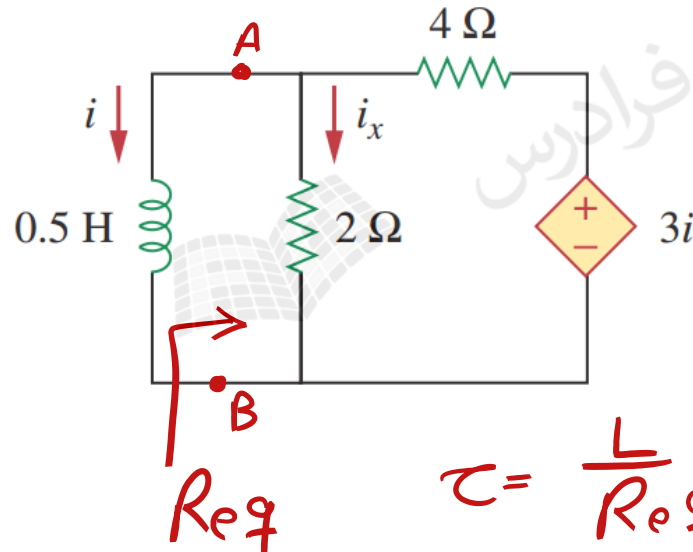
مدارهای مرتبه اول



مدارهای مرتبه اول

مثال - جریان‌های i_x و i را برای $t > 0$ محاسبه کنید.

$$\underline{i(0) = 10A}$$



$$\begin{cases} i(t) = i(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_x(t) = i_x(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

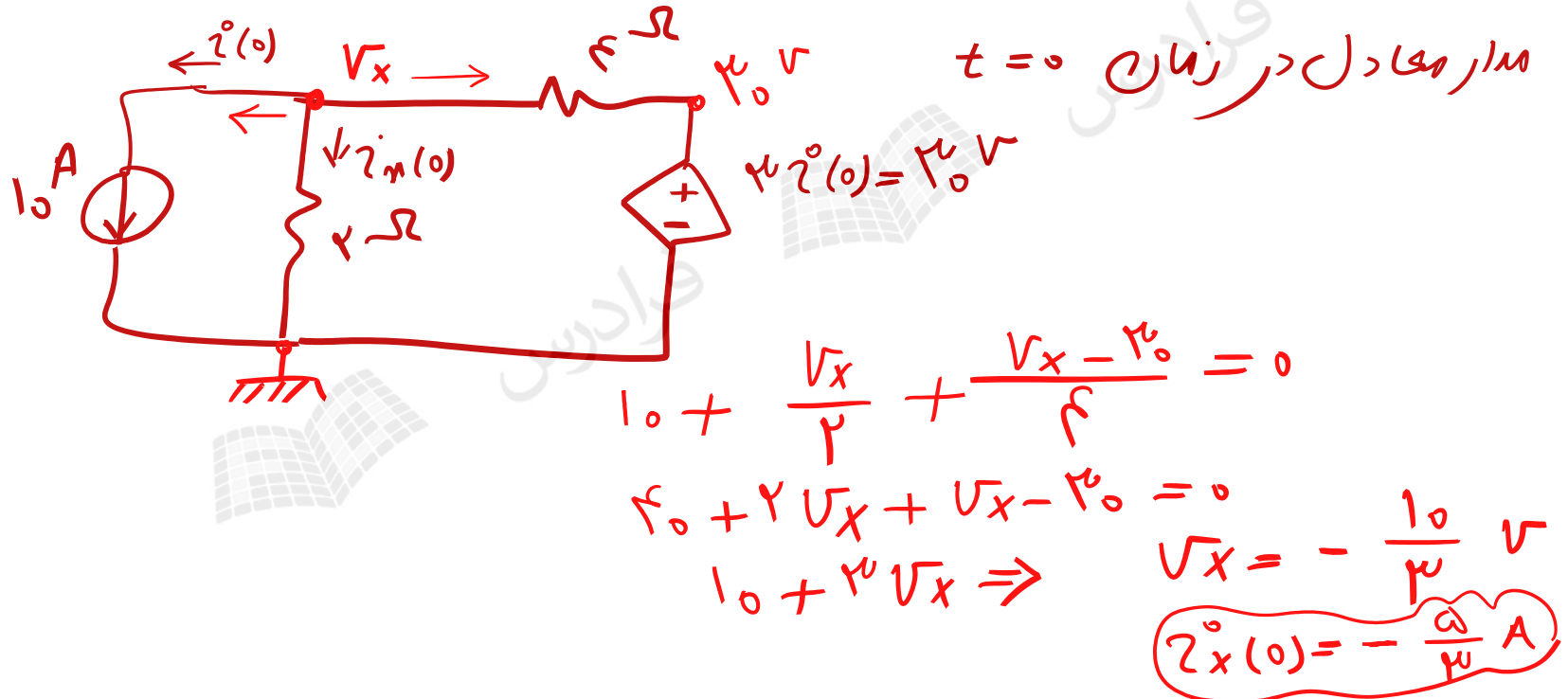
$$i(0) = 10 A$$

$$i_x(0) = -\frac{5}{3} A$$

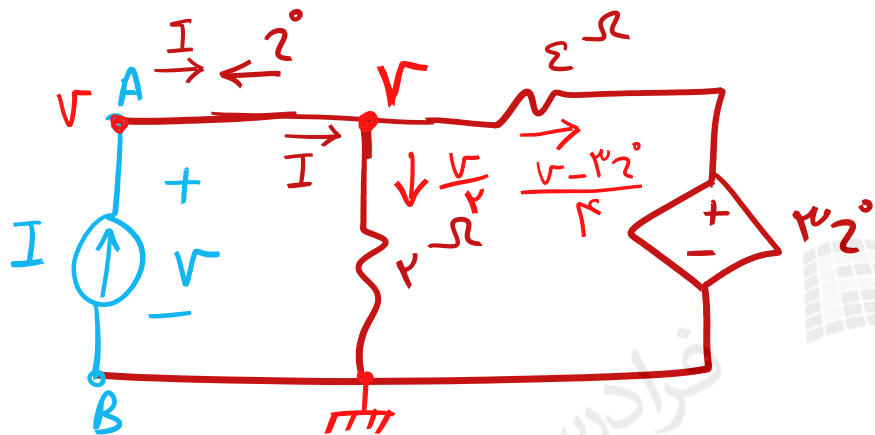
$$\tau = \frac{0.5}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1.5 s$$

$$\begin{cases} i(t) = 10 e^{-\frac{t}{1.5}} \\ i_x(t) = -\frac{5}{3} e^{-\frac{t}{1.5}} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول



مدارهای مرتبه اول



$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{1}{3} \Omega$$

$$I = \frac{V}{2} + \frac{V - 3I}{4}$$

$$I = -2^\circ$$

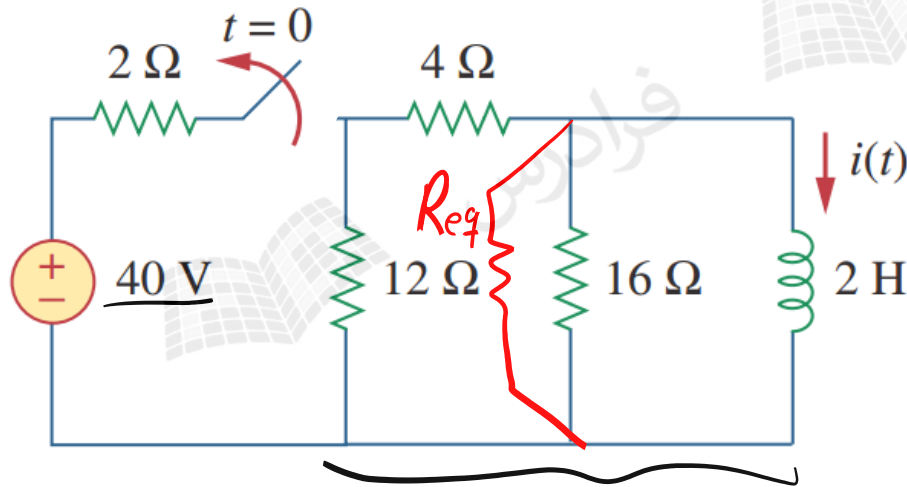
$$I = \frac{V}{2} + \frac{V + 3I}{4}$$

$$4I = 2V + V + 3I$$

$$I = 3V \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{1}{3}$$

مدارهای مرتبه اول

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی بسته بوده است و در زمان صفر باز می‌شود. ولتاژ سلف را برای زمان‌های بزرگتر از صفر رسم کنید.



$$i_L(0) = 4A$$

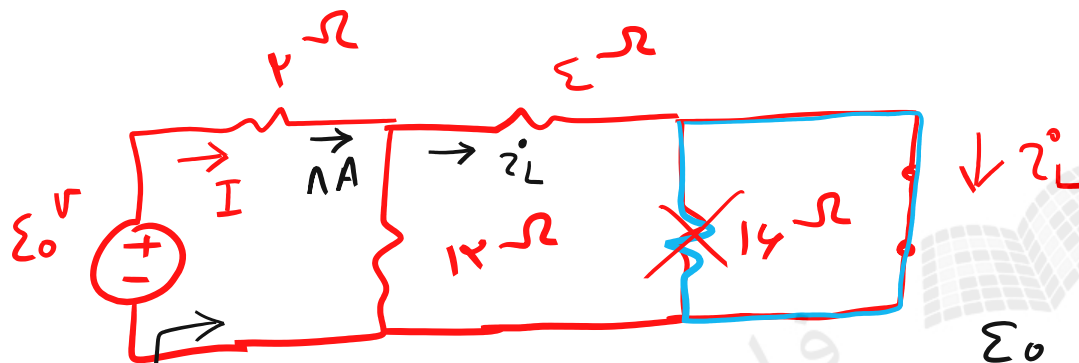
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4A$$

$$R_{eq} = (4 + 12) \parallel 16 = 8\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} s$$

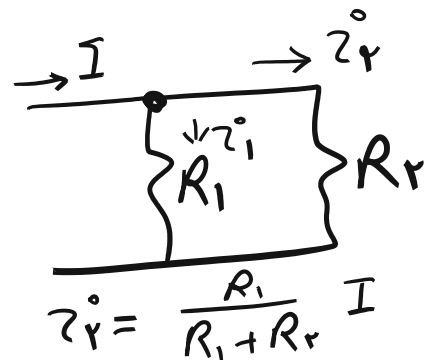
$$i(t) = 4 e^{-\frac{t}{(\frac{1}{4})}} = 4 e^{-4t}$$

مدارهای مرتبه اول

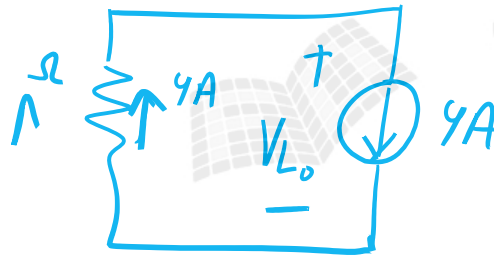
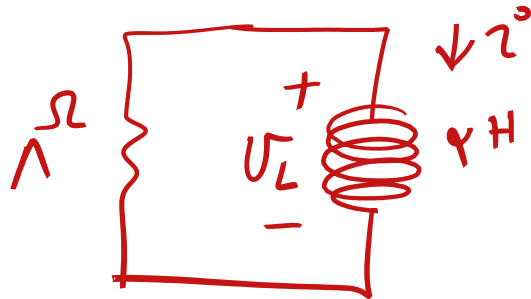
* $t < 0$

$$I = \frac{\Sigma_0}{R_{eq}} = \frac{\Sigma_0}{12 \parallel 12 + 2} = \frac{\Sigma_0}{3 + 2} = 1 \text{ A}$$

$$z_L^{(0)} = \frac{12}{12 + 12} \times 1 = \frac{12 \times 1}{14} = 4 \text{ A}$$



مدارهای مرتبه اول



$$i(0) = 4A$$

$$\rightarrow V_{L_0}^{(0+)} = -L \times 4 = -4 \times 2 = -8V \quad t \geq 0$$

$$V_L(t) = V_{L_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

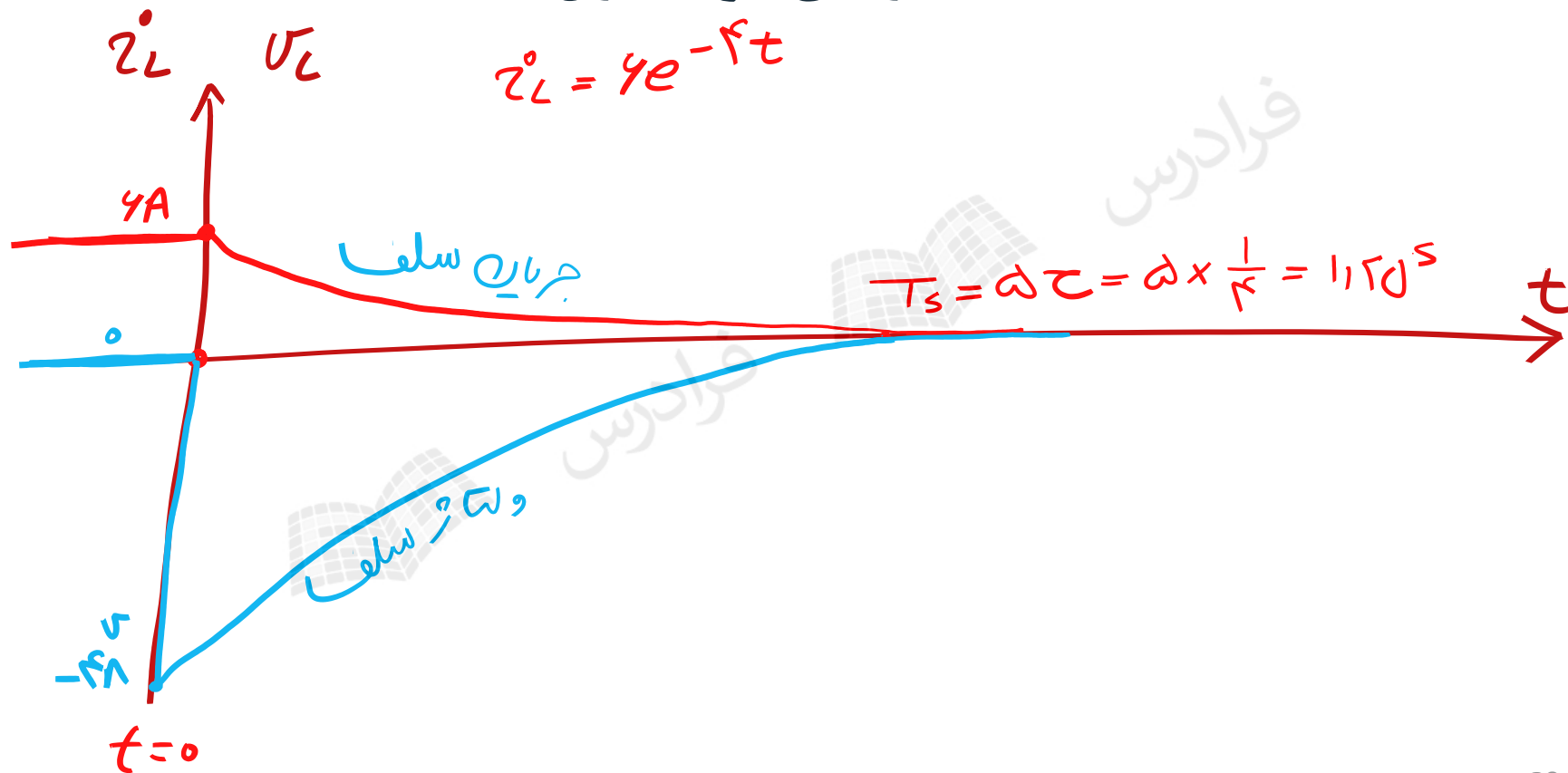
$$= -8 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_L = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (\text{راه حل ۲})$$

$$= 2 \times \frac{d}{dt} (4e^{-\frac{t}{\tau}}) =$$

$$= 2 \times 4 \times (-\frac{1}{\tau}) e^{-\frac{t}{\tau}} = -8 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

مدارهای مرتبه اول

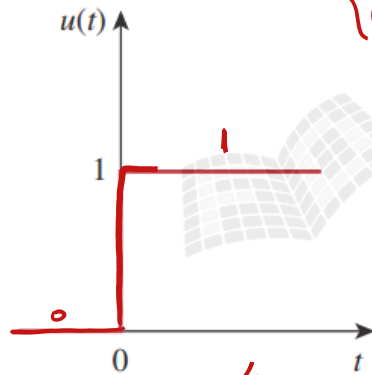


مدارهای مرتبه اول

توابع تکین (Singularity Functions)

- سیگنال‌هایی هستند که دارای ناپیوستگی زمانی هستند یا در مشتق آنها ناپیوستگی

$$\begin{cases} u(0^-) = 0 \\ u(0^+) = +1 \end{cases}$$

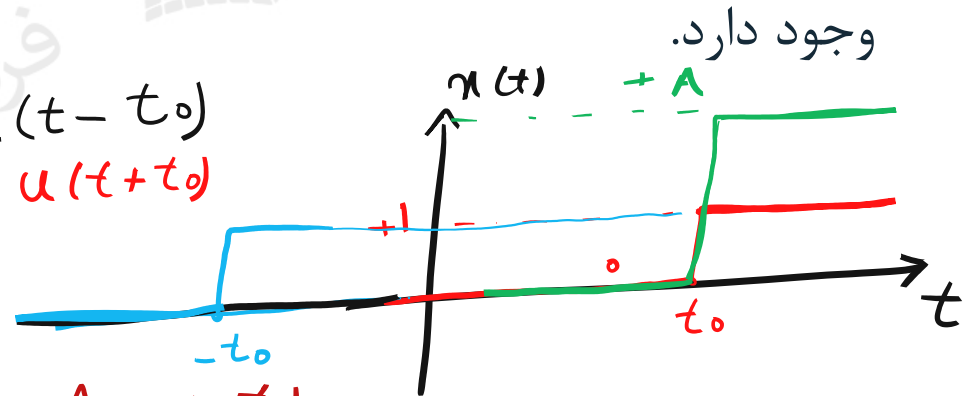


سیگنال پله
Step

$$x(t) = u(t - t_0)$$

$$x_2(t) = u(t + t_0)$$

$$x_3(t) = A u(t - t_0)$$



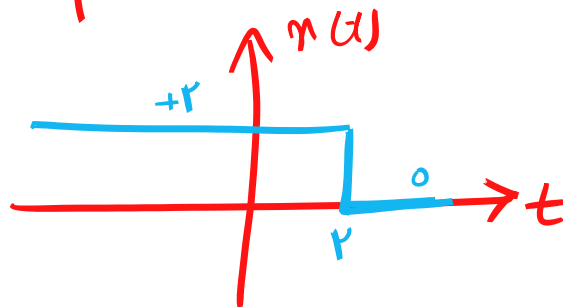
مدارهای مرتبه اول

$$x(t) = A u(at + b) = \begin{cases} 0 & at + b < 0 \\ A & at + b > 0 \end{cases}$$

تابع پله ←

$$x(t) = r u(-t + r) = \begin{cases} 0 & -t + r < 0 \\ +r & -t + r > 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t > r \\ +r & t < r \end{cases}$$

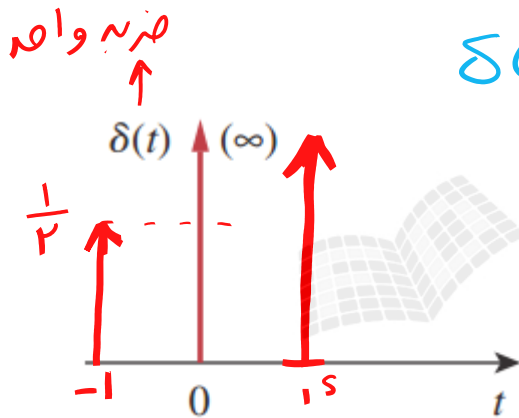


مدارهای مرتبه اول

توابع تکین (Singularity Functions)

- سیگنال هایی هستند که دارای ناپیوستگی زمانی هستند یا در مشتق آنها ناپیوستگی وجود دارد.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



تابع ضربه Impulse

$$x(t) = A \delta(at+b) = \begin{cases} A \times \infty & at+b=0 \\ 0 & at+b \neq 0 \end{cases}$$

$$x_1(t) = \delta(t-1)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \delta(t+1)$$

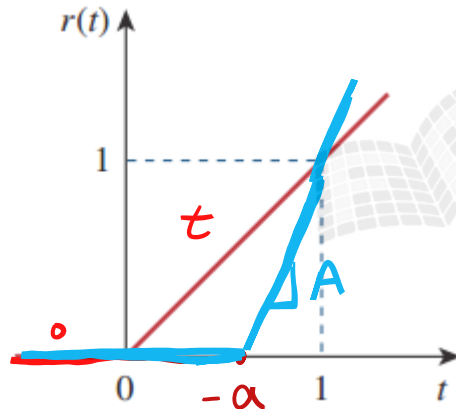
مدارهای مرتبه اول

توابع تکین (Singularity Functions)

- سیگنال‌هایی هستند که دارای ناپیوستگی زمانی هستند یا در مشتق آنها ناپیوستگی

تابع سب Ramp

وجود دارد. $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$ سب واحد



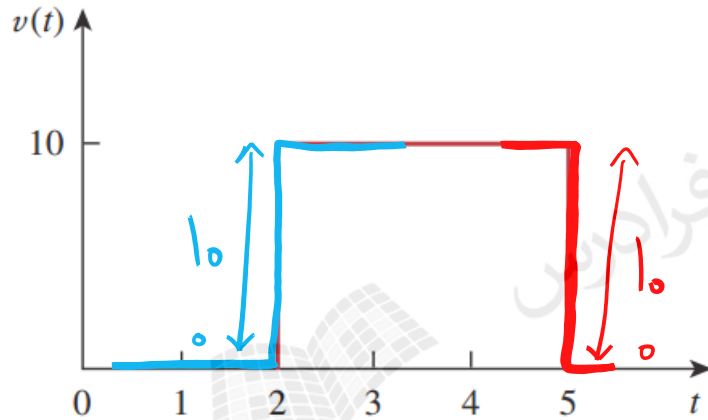
$$x(t) = A r(t + \alpha) = \begin{cases} 0 & t + \alpha < 0 \\ A t + A \alpha = A(t + \alpha) & t + \alpha > 0 \\ t = -\alpha \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول

$$\begin{cases} x(t) = \underline{a_0 \delta(t)} + \underline{a_1 \delta(t-1)} + \underline{a_2 \delta(t-2)} + \dots \\ x(t) = a_0 u(t) + a_1 u(t-1) + \dots + \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول

مثال - سیگنال زیر را بر حسب توابع تکین بنویسید.



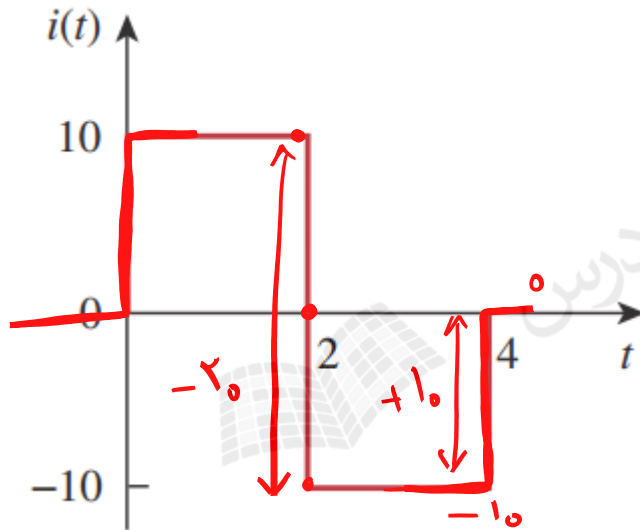
بالای استتبی

$$v(t) = 10u(t-2) - 10u(t-5)$$

$$v(t) = 10(u(t-2) - u(t-5))$$

مدارهای مرتبه اول

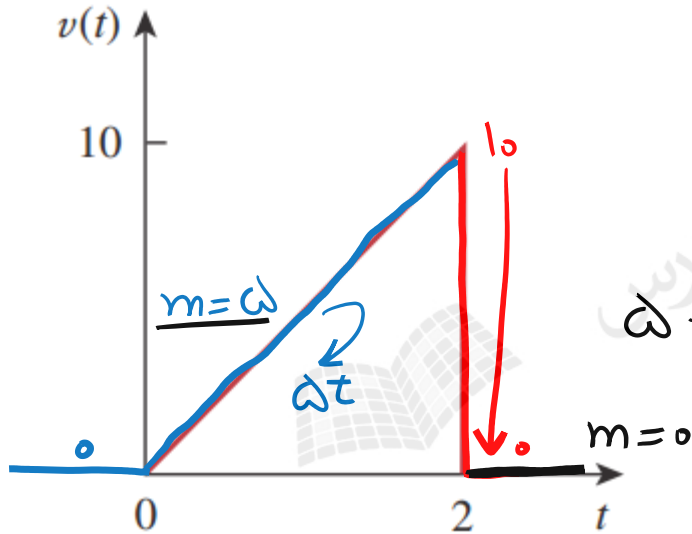
مثال - سیگنال زیر را بر حسب توابع تکین بنویسید.



$$i'(t) = 10u(t) - 20u(t-2) + 10u(t-4)$$

مدارهای مرتبه اول

مثال - سیگنال زیر را بر حسب توابع تکین بنویسید.



$$v(t) = \omega r(t) - 10 u(t-2) - \omega r(t-2)$$

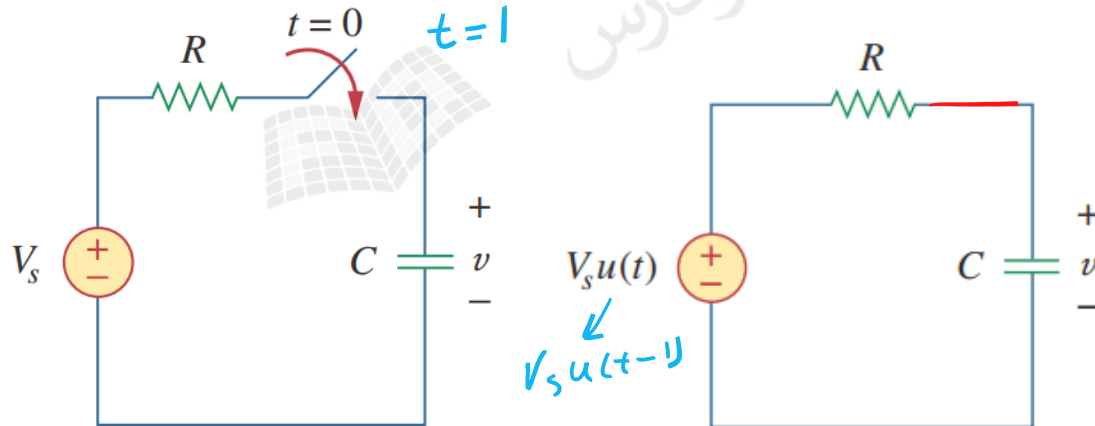
$$\omega + (-\omega) = 0$$

پایس مثلثی

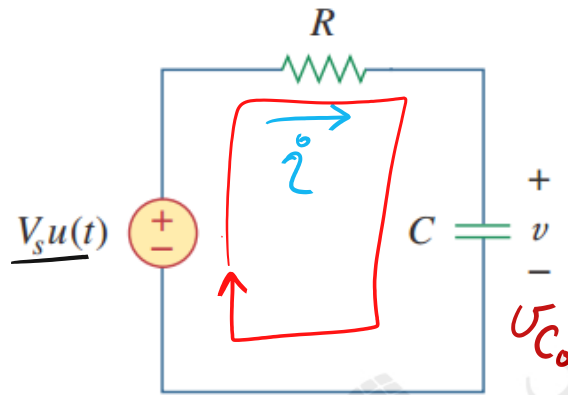
مدارهای مرتبه اول

پاسخ پله مدار RC

- پاسخ پله پاسخ مدار به سیگنال تحریک ورودی پله است.
- اعمال ناگهانی یک ولتاژ یا جریان به مدار مرتبه اول منجر به پاسخ پله می شود.



مدارهای مرتبه اول



$$v(0) = V_{C_0}$$

پاسخ پله مدار RC

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$V_s u(t) = Ri + v = RC \frac{dv}{dt} + v$$

$$\begin{cases} RC \frac{dv}{dt} + v = V_s u(t) \\ v(0) = \underline{V_{C_0}} \end{cases}$$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = V_s \quad t > 0^+$$

مدارهای مرتبه اول

$$\rightarrow \dot{x}(t) + a x(t) = f(t)$$

یادآوری معادلات دیفرانسیل

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

حواپ عمومی

(یا سخااشی از $f(t)$)

حواپ خصوصی

|||
حواپ حالت صفر

$$\text{if } f(t) = A \rightarrow x_p(t) = X \rightarrow 0 + aX = A \Rightarrow X = \frac{A}{a}$$

$$\text{if } f(t) = At + B \rightarrow x_p(t) = Ct + D \rightarrow C + a(Ct + D) = At + B$$

$$\begin{aligned} aCt + C + aD &= At + B \\ \begin{cases} aC = A \\ aD + C = B \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} C = \frac{A}{a} \\ D = \frac{B - C}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه اول

$$RC \frac{d}{dt} v + v = v_s$$

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

$$= A e^{-\frac{t}{\tau}} + v_s$$

$$v_p(t) = V = cte \Rightarrow RC \times 0 + V = v_s \Rightarrow V = v_s$$

$$v(t=0) = A e^{-\frac{0}{\tau}} + v_s = v_{c0} \Rightarrow A = v_{c0} - v_s$$

در کل

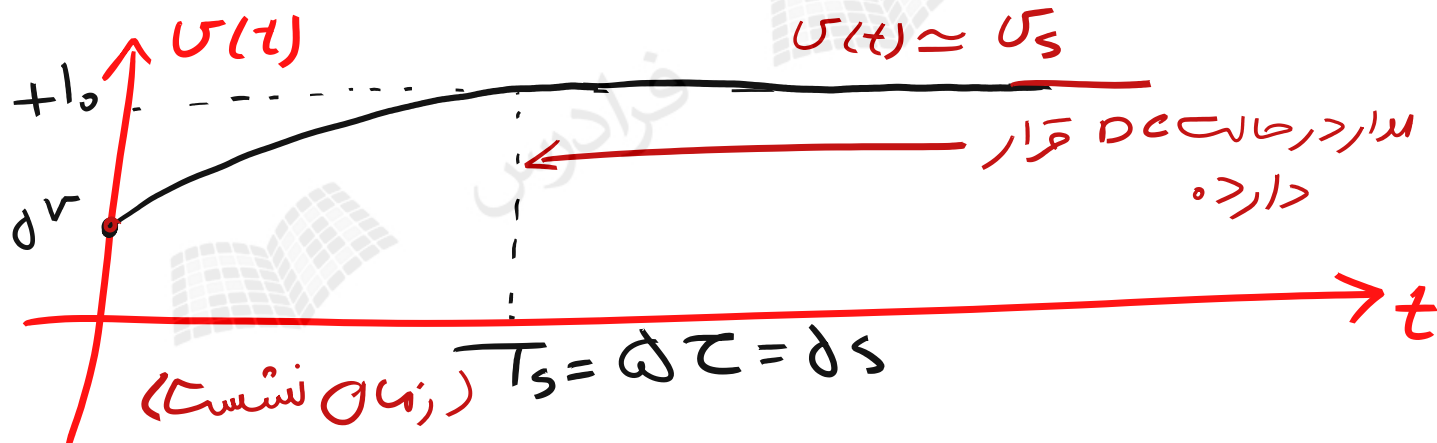
$$v(t) = (v_{c0} - v_s) e^{-\frac{t}{\tau}} + v_s$$

پاسخ می‌دهد

مدارهای مرتبه اول

$$\underline{V_S = 10\text{ V}} \quad V_{C_0} = 5\text{ V} \quad \tau = 1\text{ s}$$

$$V(t) = 10 + (5 - 10)e^{-t} = \underline{10 - 5e^{-t}}$$



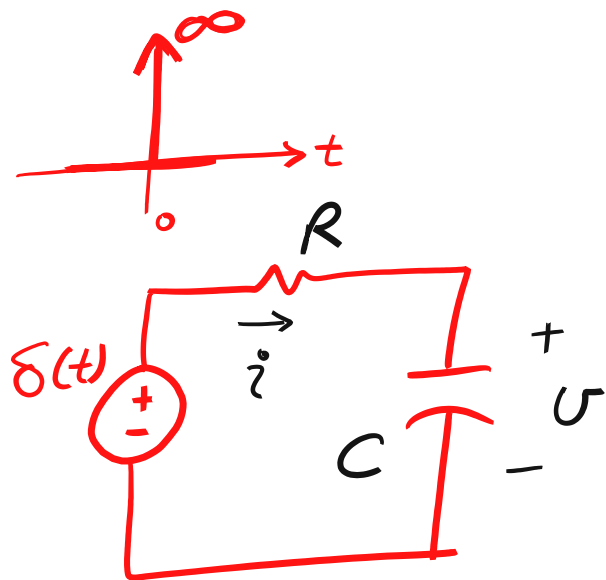
مدارهای مرتبه اول

$$v(t) = (v(0) - v_s) e^{-\frac{t}{\tau}} + v_s$$

$$x(t) = (x(0) - x(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$$

پاسخ پله ← $x(0)$ ← از روی مدار معادل در $t=0^+$
 ← $x(\infty)$ ← از روی تحلیل DC مدار بدست می آید
 ← $\tau = R_{eq} C$ ← τ

مدارهای مرتبه اول



$$\rightarrow RC \frac{dU}{dt} + U = \delta(t) \quad \text{یا معادله}$$

$$\rightarrow \left(RC \frac{dU}{dt} + U = 0 \right) \quad t > 0$$

* فقط برای $t > 0$ و $U(t)$ در $t = 0$ اثر می‌گذارد.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = +1$$

مدارهای مرتبه اول

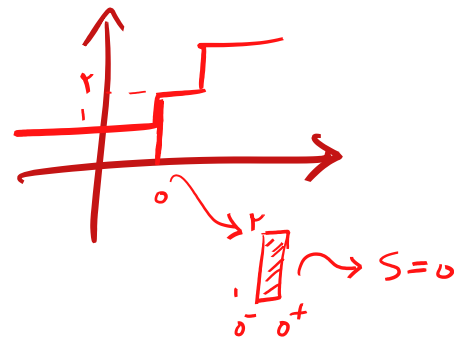
$$\int_{0^-}^{0^+} \left(RC \frac{d}{dt} v(t) + v(t) \right) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$$RC \int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) dt + \int_{0^-}^{0^+} v(t) dt = +1$$

$$RC \left(v(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + 0 \right) = +1$$

$$RC (v(0^+) - v(0^-)) = 1$$

$$v(0^+) = v(0^-) + \frac{1}{RC} = V_{C0} + \frac{1}{RC}$$

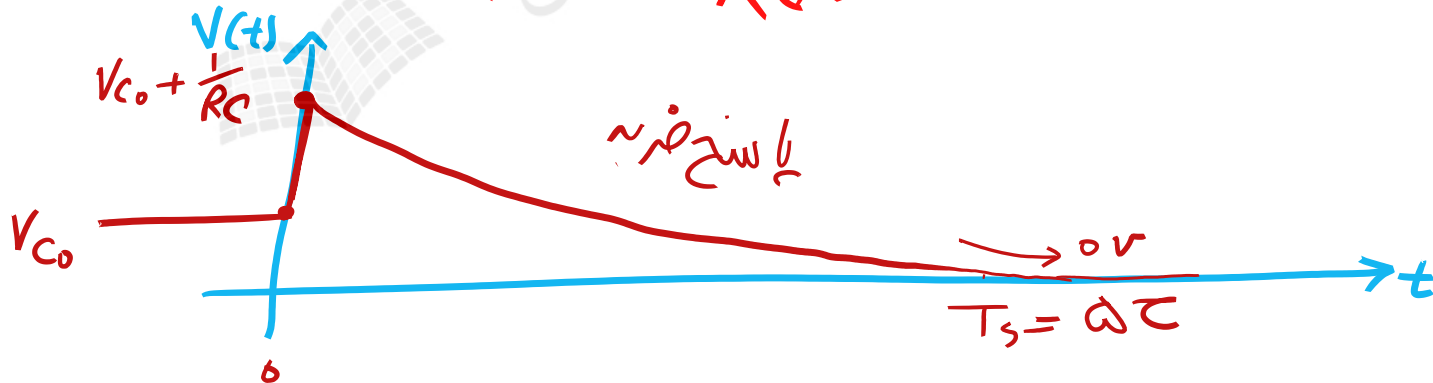


مدارهای مرتبه اول

$$RC \frac{dV}{dt} + V = 0 \quad V(0^+) = V_{C0} + \frac{1}{RC}$$

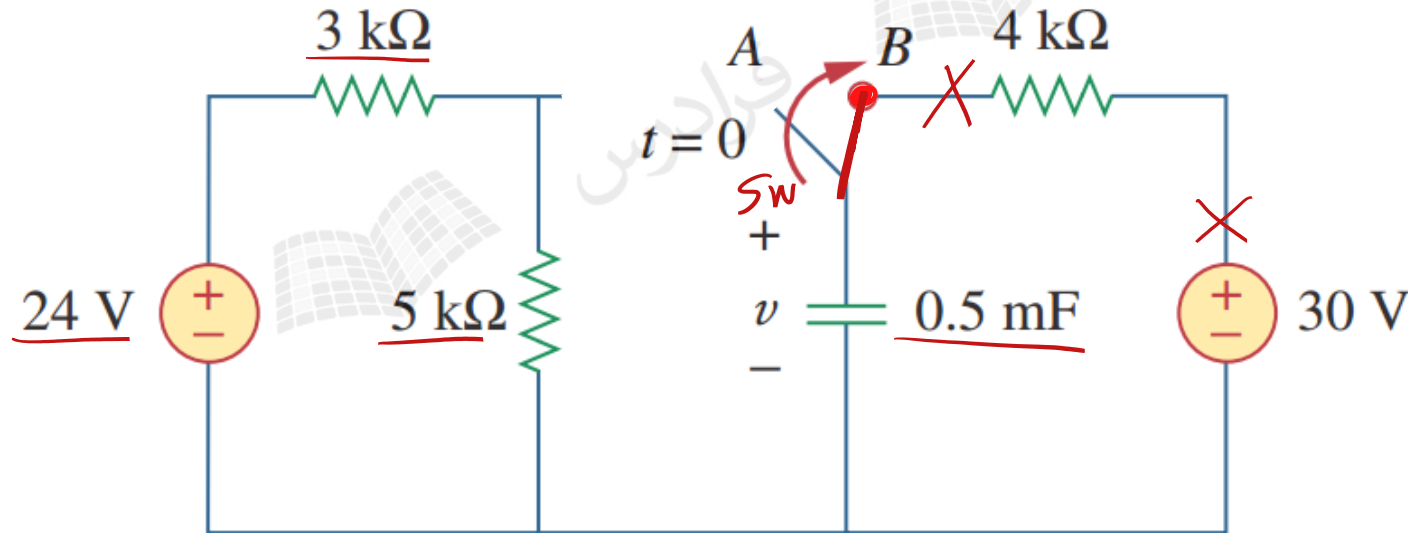
$$V = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC \quad t > 0$$

$$V = \left(V_{C0} + \frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

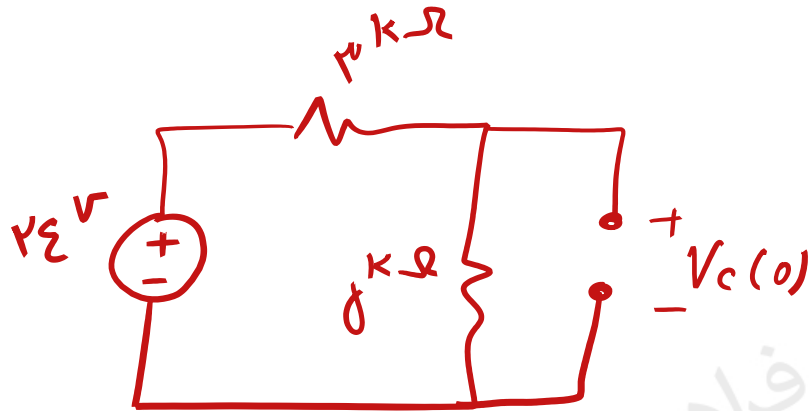


مدارهای مرتبه اول

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی در وضعیت A و سپس در زمان صفر به وضعیت B منتقل می شود. جریان و ولتاژ خازن را برای زمان های بزرگتر از صفر رسم کنید.



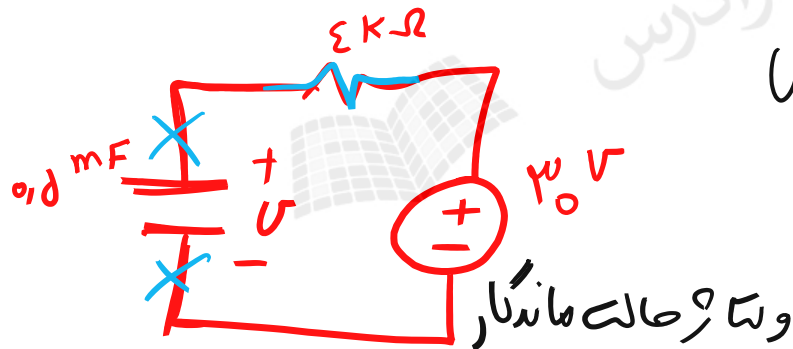
مدارهای مرتبه اول



$$V_c(0) \leftarrow t < 0$$

$$V_c(0) = \frac{6}{6+3} \times 24 = 16V$$

$$V_c(0^+) = +16V \leftarrow$$



$$V(t) = V(\infty) + (V_{c0} - V(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

$$V_{c0} = 16V$$

$$\tau = RC = 6000 \times 0.01 \times 10^{-3} = 2s$$

$$V(\infty) = 10V$$

$$V(t) = (10 + (16 - 10)e^{-\frac{t}{2}})u(t)$$

مدارهای مرتبه اول

$$v(t) = \left(v_0 - \underbrace{15 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{transient}} \right) u(t)$$

$$t \gg 0 \quad \underline{t} > T_s = \tau \rightarrow v(t) \simeq v_0$$

$$v(t) = \underbrace{v_0}_{\text{جواب حالت ماندگار}} - \underbrace{15 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{جواب حالت گذرا}} = v_{ss} + v_{tr}$$

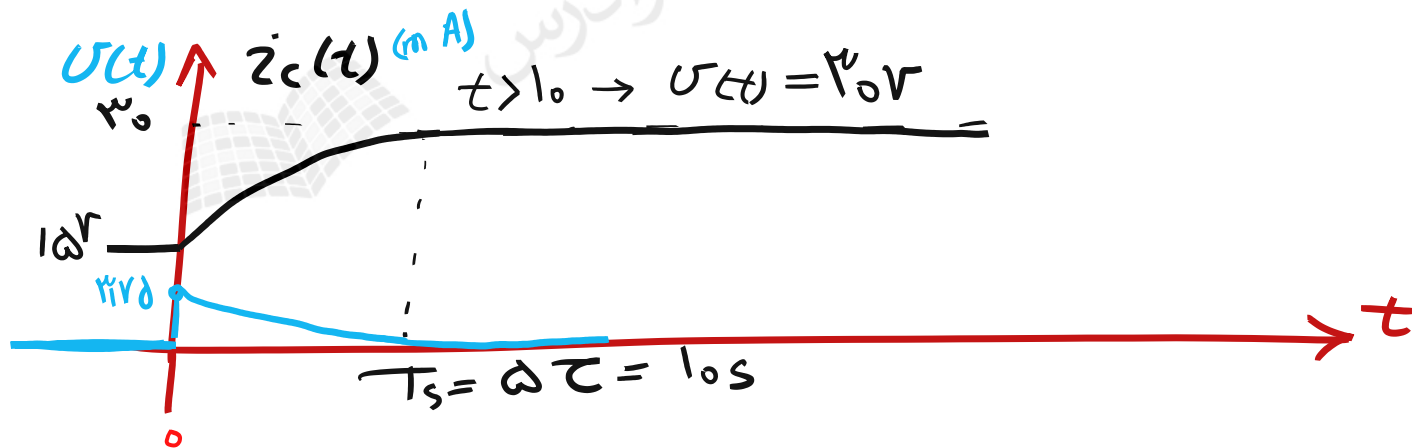
$$\begin{cases} v_{ss} = v_0 \\ v_{tr} = -15 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول

$$v(t) = (v_0 - 15 e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t > 0$$

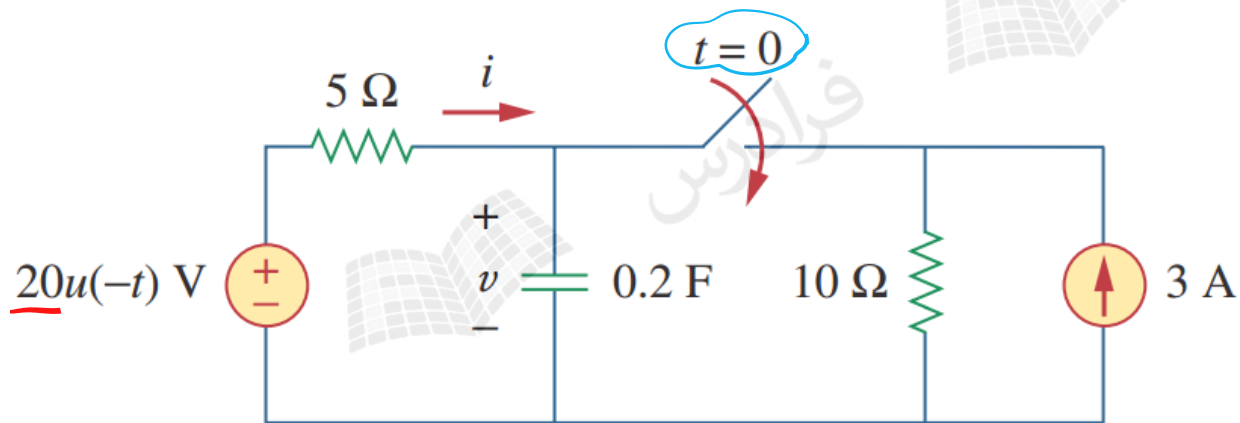
$$i_c(t) = C \frac{dv}{dt} = 0.5 \times \frac{15}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ mA}$$

$$i_c(t) = 31.75 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ mA} \rightarrow i_c(0) = 31.75 \text{ mA}$$



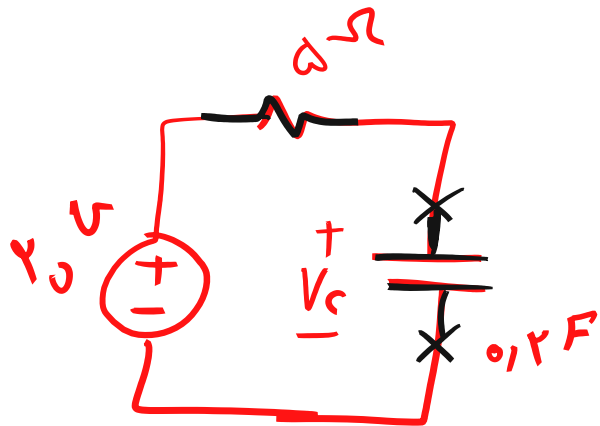
مدارهای مرتبه اول

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی باز و در زمان صفر بسته می‌شود.
جریان i را برای زمان‌های بزرگتر از صفر بدست آورید.



$$u(-t) = \begin{cases} 1 & -t > 0 \\ 0 & -t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

مدارهای مرتبه اول



$$V_c(0^-) = 20\text{ V}$$

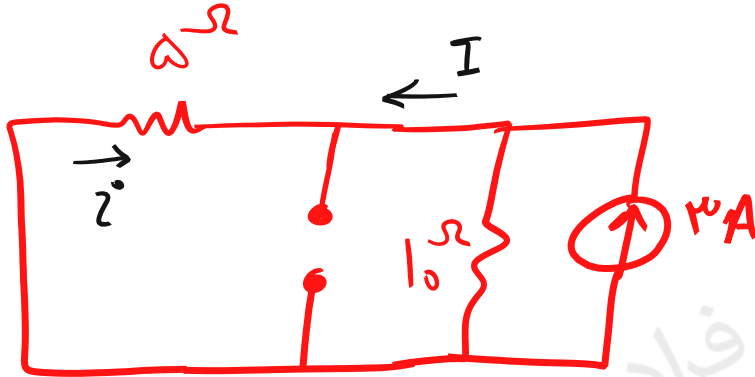
$$V_c(0^+) = \underline{+20\text{ V}}$$

 $t < 0$

$$i(t) = i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

 $t > 0$

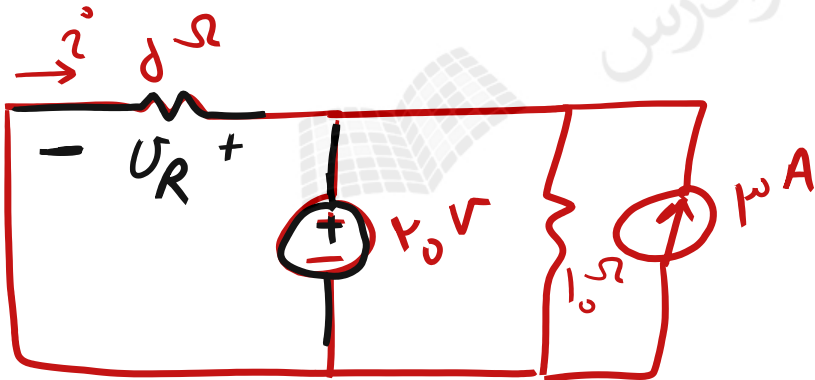

مدارهای مرتبه اول



* معادل $Z(\infty)$

$$I = 3 \times \frac{10}{10 + 5} = 2A$$

$$Z^o(\infty) = -I = -2A$$



* معادل $Z(0^+)$

$$V_R = 20V$$

$$Z^o(0^+) = -\frac{V_R}{R} = -\frac{20}{5} = -4A$$

مدارهای مرتبه اول

$$\tau = R_{eq} C = (5 \parallel 10) \times 0,2$$

$$= \frac{5 \times 10}{15} \times 0,2 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

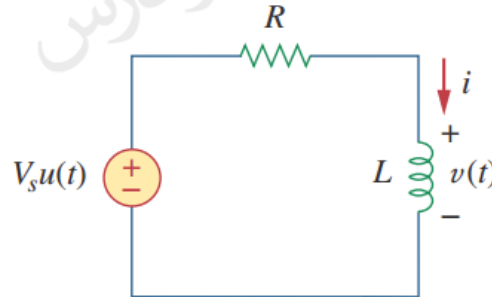
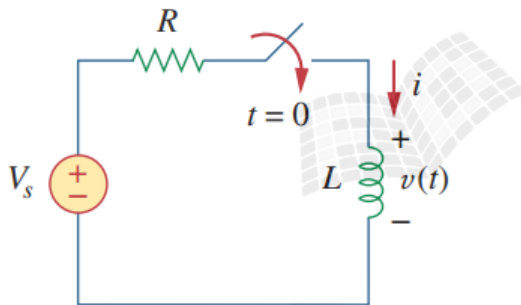
$$i'(t) = -2 + (-\varepsilon - (-2)) e^{-\frac{t}{(\frac{2}{3})}}$$

$$i(t) = (-2 - 2e^{-1,5t}) = -2(1 + e^{-1,5t}) \text{ A}$$

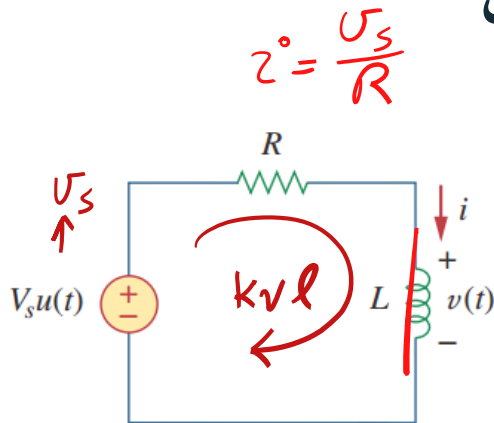
مدارهای مرتبه اول

پاسخ پله مدار RL

- پاسخ پله پاسخ مدار به سیگنال تحریک ورودی پله است.
- اعمال ناگهانی یک ولتاژ یا جریان به مدار مرتبه اول منجر به پاسخ پله می شود.



مدارهای مرتبه اول



$$z^{\circ}(0) = z^{\circ}_L$$

پاسخ پله مدار RL

$$V_s u(t) = R i^{\circ} + L \frac{d}{dt} i^{\circ} \quad \leftarrow$$

$$\rightarrow L \frac{d}{dt} i^{\circ} + R i^{\circ} = V_s \quad t > 0$$

$$i^{\circ}(t) = i^{\circ}_h(t) + i^{\circ}_p(t)$$

$$= A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_s}{R}$$

$$i^{\circ}(0) = i^{\circ}_L$$

$$i^{\circ}_L = A e^0 + \frac{V_s}{R}$$

$$\left(A = i^{\circ}_L - \frac{V_s}{R} \right) \quad \leftarrow$$

مدارهای مرتبه اول

$$\begin{cases} i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(i_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \tau = \frac{L}{R} \end{cases}$$

پاسخ حالت گذرا ←
پاسخ حالت دائم ←

$$i(t) = \underbrace{i_{ss}}_{\downarrow} + i_{tr}$$

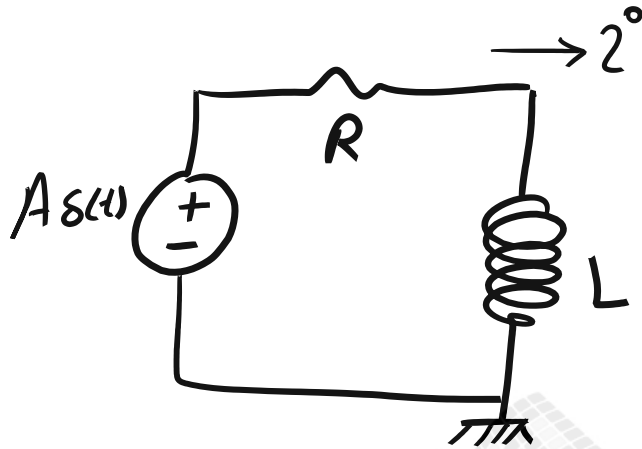
از روی تحلیل DC مدار بدست می آید

مدارهای مرتبه اول

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(\infty) + (x(0^+) - x(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= x_{ss} + (x(0^+) - x_{ss})e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}$$

$x(0^+) \leftarrow$ از روی مدار معادل در $t=0^+$ محاسب می‌شود
 $x(\infty) \leftarrow x_{ss}$ تحلیل DC
 $\tau = \frac{L}{R_{eq}} \leftarrow \tau$

مدارهای مرتبه اول



* پاسخ این $(L \frac{di}{dt} + Ri = A\delta(t))$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \leftarrow t > 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} (L \frac{di}{dt} + Ri) dt = A \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = A$$

مدارهای مرتبه اول

$$L \dot{z}(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} R z^\circ dt}_{\text{صفر}} = A$$

$$L (z^\circ(0^+) - z^\circ(0^-)) = A$$

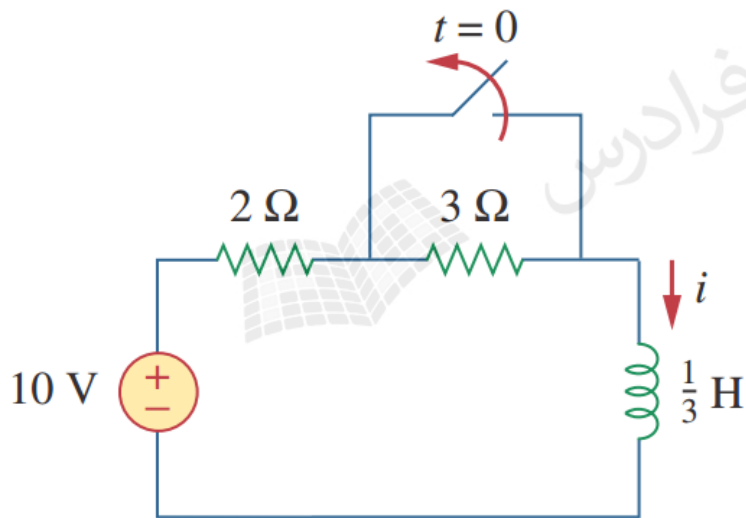
$$z^\circ(0^+) = z^\circ(0^-) + \frac{A}{L} = z_{L0} + \frac{A}{L} \leftarrow$$

$$\begin{cases} z^\circ(t) = \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} = (z_{L0} + \frac{A}{L}) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

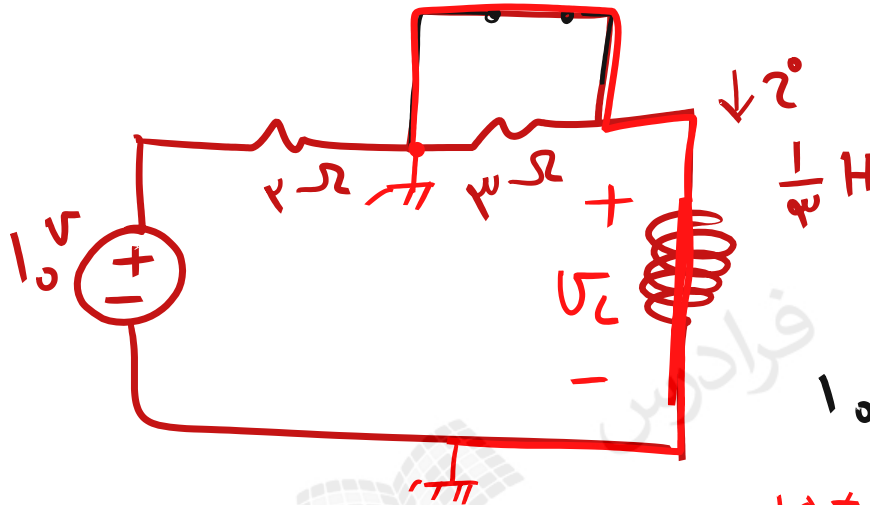
$$\tau = \frac{L}{R}$$

مدارهای مرتبه اول

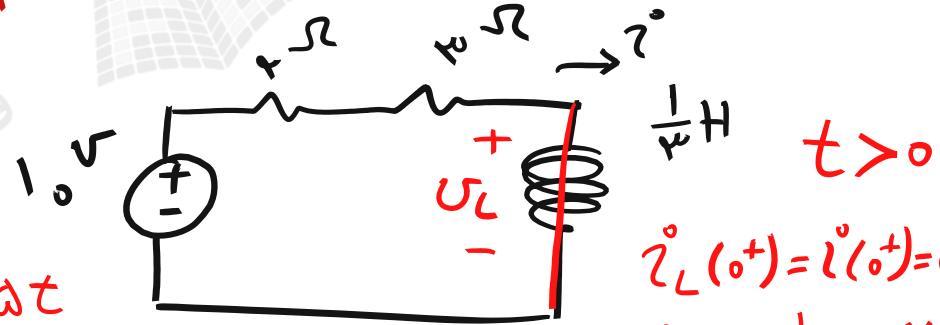
مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی بسته بوده است و در زمان صفر باز می‌شود. جریان و ولتاژ سلف را بر حسب زمان رسم کنید.



مدارهای مرتبه اول



$$i(0^-) = \frac{10}{2} = 5A \quad t < 0$$



$$i_L(0^+) = i(0^+) = 5A$$

$$i_{ss} = \frac{10}{2+3} = 2A$$

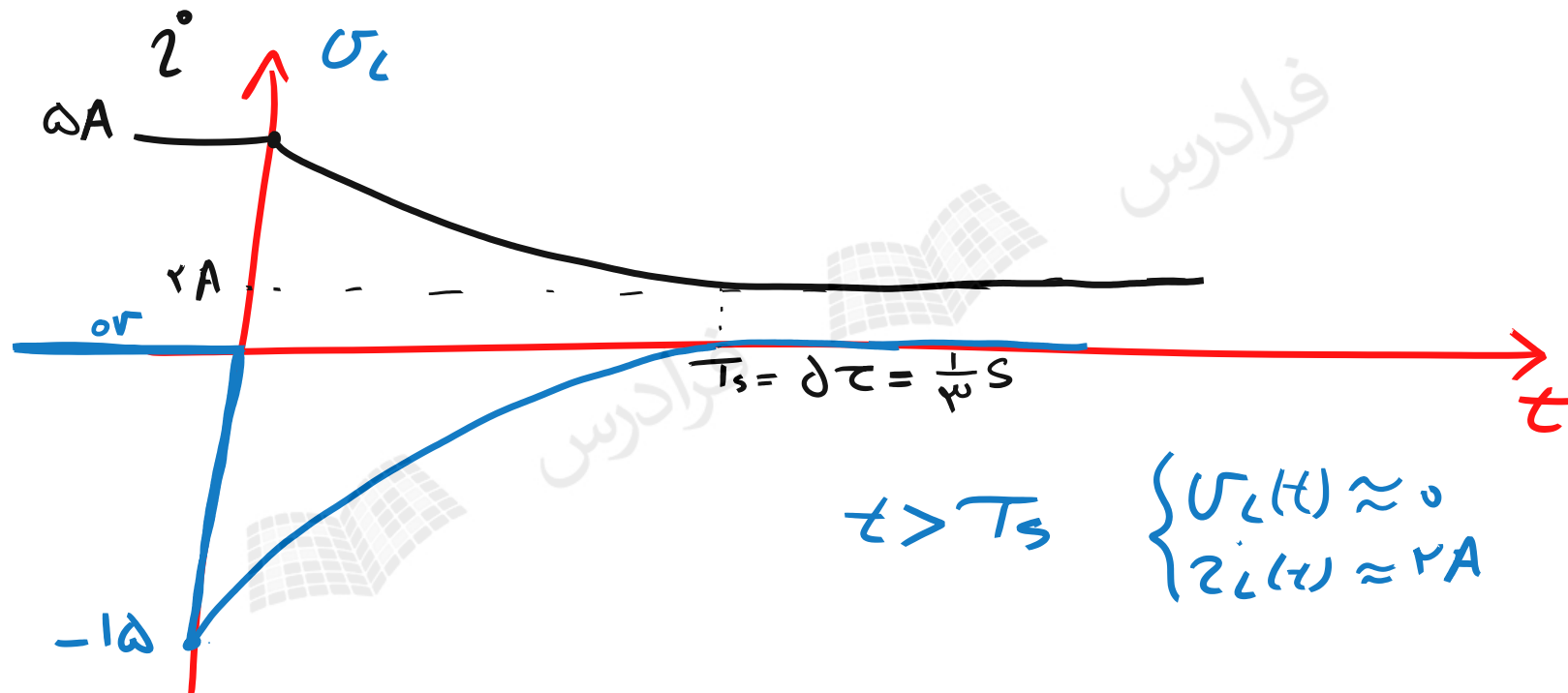
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15}$$

$$i(t) = 2 + (5 - 2)e^{-15t}$$

$$i(t) = 2 + 3e^{-15t} \quad A$$

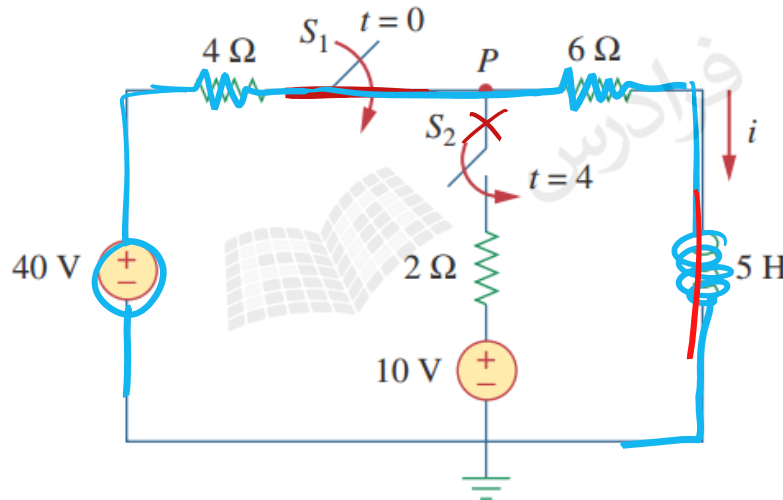
$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{3} \times 3 \times (-15)e^{-15t} = -15e^{-15t}$$

مدارهای مرتبه اول



مدارهای مرتبه اول

مثال - کلید مد $S1$ و $S2$ در ابتدا باز هستند. در زمان صفر $S1$ بسته می شود و سپس بعد از چهار ثانیه $S2$ نیز بسته می شود. جریان سلف برای تمام زمان ها را محاسبه کنید.



$$\begin{aligned}
 & \rightarrow i(0^-) = 0 \text{ A} \quad t < 0 \\
 & \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ s} \quad 0 < t < 4 \text{ s} \\
 & i'(0^+) = 0 \text{ A} \\
 & i_{ss} = i(\infty) = \frac{\varepsilon_o}{4 + 6} = \varepsilon \text{ A}
 \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه اول

$$0 < t < \varepsilon^s$$

$$\begin{aligned} i^o(t) &= i_{ss} + (i(0^+) - i_{ss})e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \varepsilon + (0 - \varepsilon)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

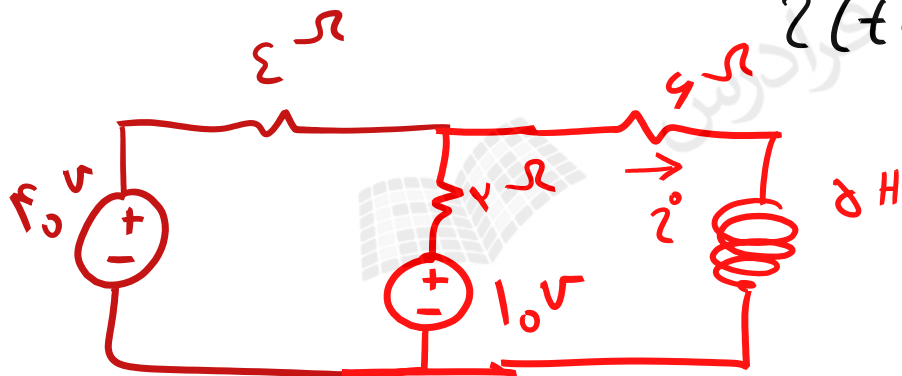
$$i^o(t = \varepsilon^-) = \varepsilon(1 - e^{-1}) = \varepsilon A$$

$$t > \varepsilon^s *$$

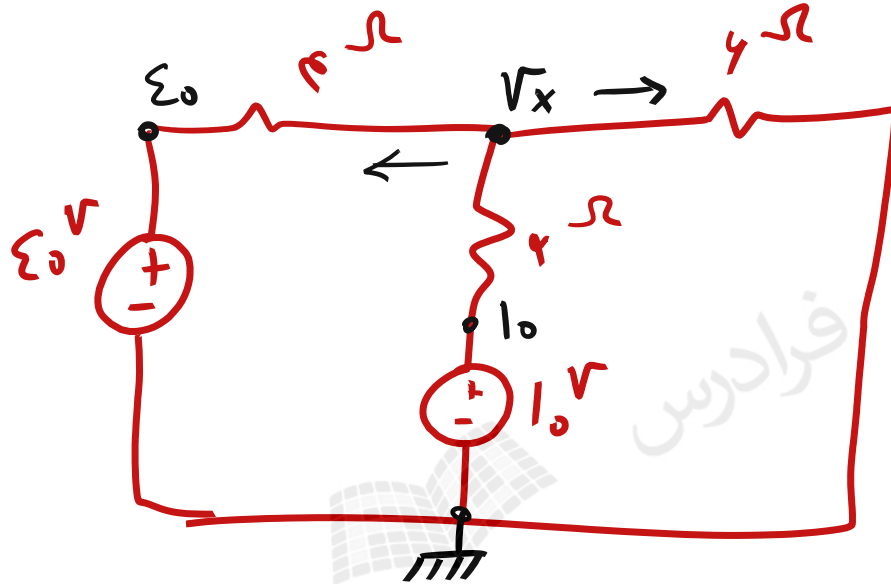
$$i^o(\varepsilon^+) = i^o(\varepsilon^-) = \varepsilon A$$

$$\tau = \frac{\omega}{\omega + 2||\varepsilon} = \frac{\omega}{\omega + \frac{1}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega + \frac{1}{\omega}}$$

$$\tau = \frac{1\omega}{11} \text{ s}$$



مدارهای مرتبه اول



↓ i_{ss}

* معادله KCL

$$\frac{V_x - 10}{4} + \frac{V_x - 10}{2} + \frac{V_x}{6} = 0$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) V_x = 10 + 10 = 20$$

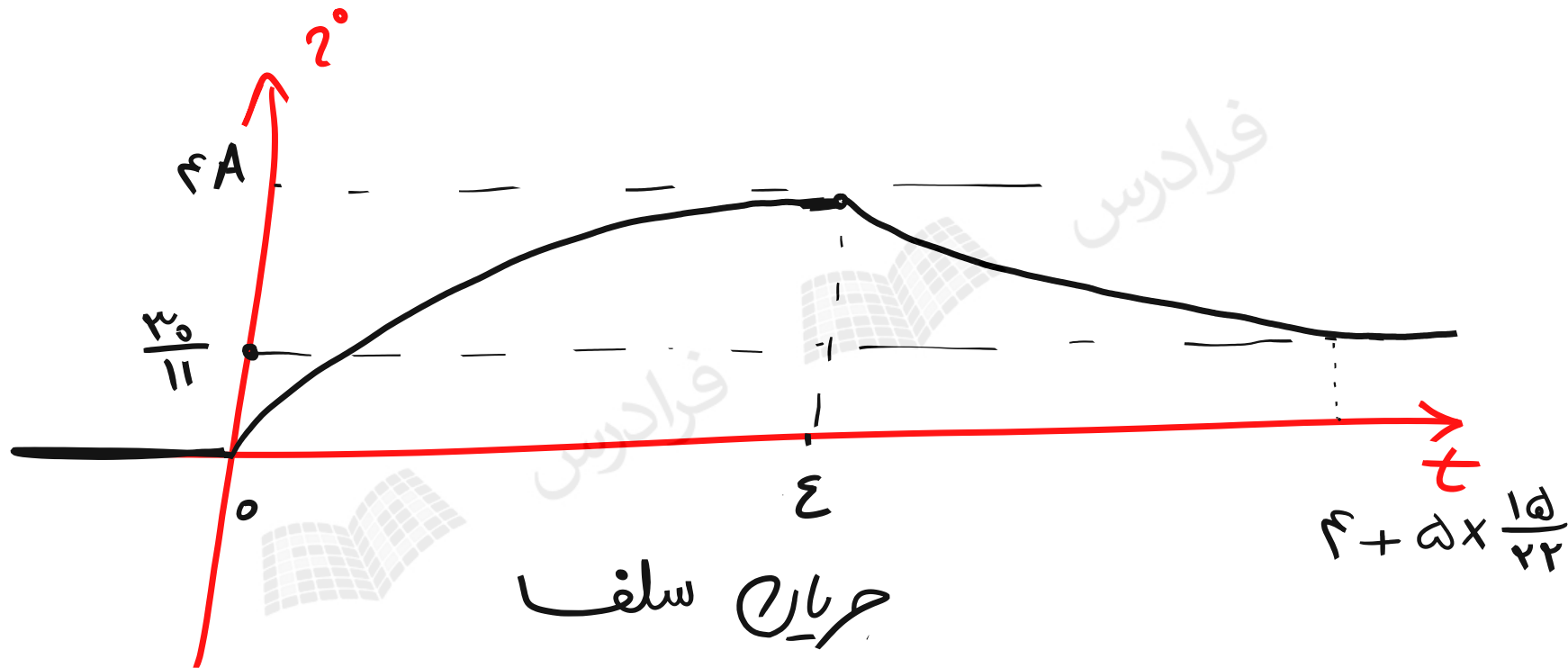
$$V_x = \frac{20}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)} = \frac{20}{\frac{9+6+4}{12}} = \left(\frac{20 \times 12}{19}\right)$$

$$i_{ss} = \frac{V_x}{6} = \frac{20 \times 2}{19} = \frac{40}{19} \text{ A}$$

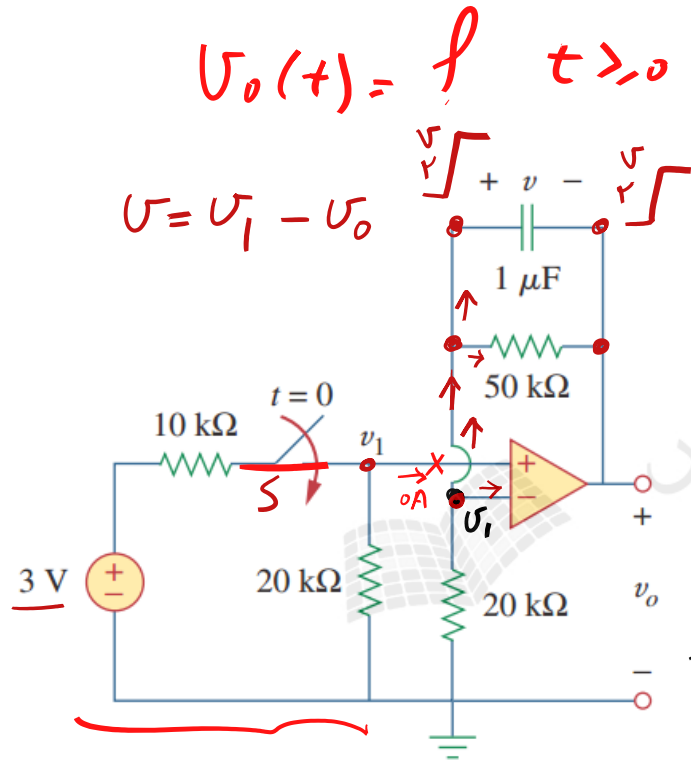
مدارهای مرتبه اول

$$\begin{aligned}
 t > \varepsilon \quad \tau(t) &= \frac{v_o}{11} + \left(\varepsilon - \frac{v_o}{11} \right) e^{-\frac{t}{\left(\frac{15}{11} \right)}} \\
 &= \left(\frac{v_o}{11} \right) + \frac{11}{11} e^{-\frac{v_o}{10}(t-\varepsilon)} \\
 \tau(t) &= \tau_{ss} + (\tau(t_o) - \tau_{ss}) e^{-\frac{t-t_o}{\tau}}
 \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه اول



مدارهای مرتبه اول



مدارات مرتبه اول دارای تقویت کننده‌های عملیاتی

$$(v(-) = 0V \quad v(+) = 0V)$$

$$v_i = \frac{20k\Omega}{20k\Omega + 10k\Omega} \times 3V = 2V$$

$$v^- = v^+ = 2V = v_i \leftarrow$$

$$\left(\frac{v_i}{20} + 0 + \frac{v_i - v_o}{50} + 1 \frac{d}{dt}(v_i - v_o) = 0 \right)$$

$$\tau = RC \rightarrow \mu s$$

$$5v_i + 2v_i - 2v_o + 100 \frac{d}{dt} v_i - 100 \frac{d}{dt} v_o = 0$$

مدارهای مرتبه اول

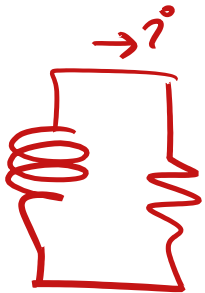
$$0 \times 2 - 2 V_0 - 100 \frac{d}{dt} (2 V_0) - 100 \frac{d}{dt} V_0 = 0$$

صفر

$$12 = 2 V_0 + 100 \frac{d}{dt} V_0 \Rightarrow \frac{d}{dt} V_0 + \frac{V_0}{50} = \frac{12}{100}$$

$$\tau = 50 \text{ ms}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\left(\frac{L}{R}\right)} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$



مدارهای مرتبه اول

$$\begin{cases} U_o(0^+) = V^v \\ U_o(\infty) = V^v \end{cases}$$

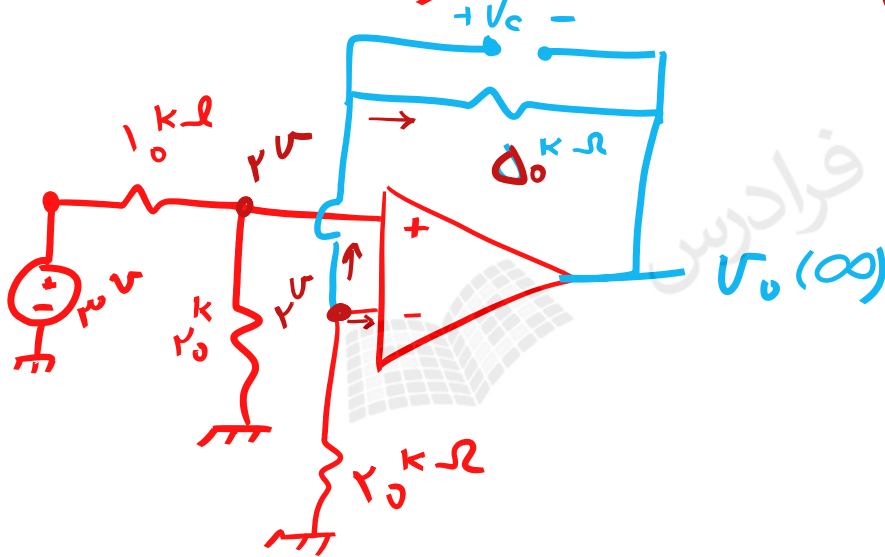
$$\tau = 50 \text{ ms}$$

$$\text{Kcl: } \frac{V}{R_o} + 0 + \frac{V - U_o(\infty)}{50} = 0$$

$$\frac{100}{R_o} + V - U_o(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow$$

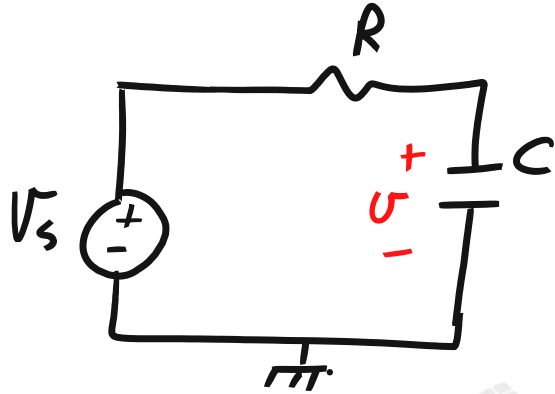
$$U_o(\infty) = V^v$$



مدارهای مرتبه اول

$$\begin{aligned}
 V_o(t) &= V_o(\infty) + (V_o(0^+) - V_o(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= V + (V - V)e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= (V - 0)e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه اول



* ارتباط سیگنال پاسخ و پله

پاسخ پله $\left\{ \begin{array}{l} V(t) = (1 + (V_{c0} - 1)e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \\ V_s = u(t) \end{array} \right.$

پاسخ پهن $\left\{ \begin{array}{l} V(t) = (V_{c0} + \frac{1}{RC})e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \\ V_s = \delta(t) \end{array} \right.$

مدارهای مرتبه اول

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

فرض: شرایط اولیه صفر $V_{C0} = 0$

پس: $u(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t) = \delta(t)$

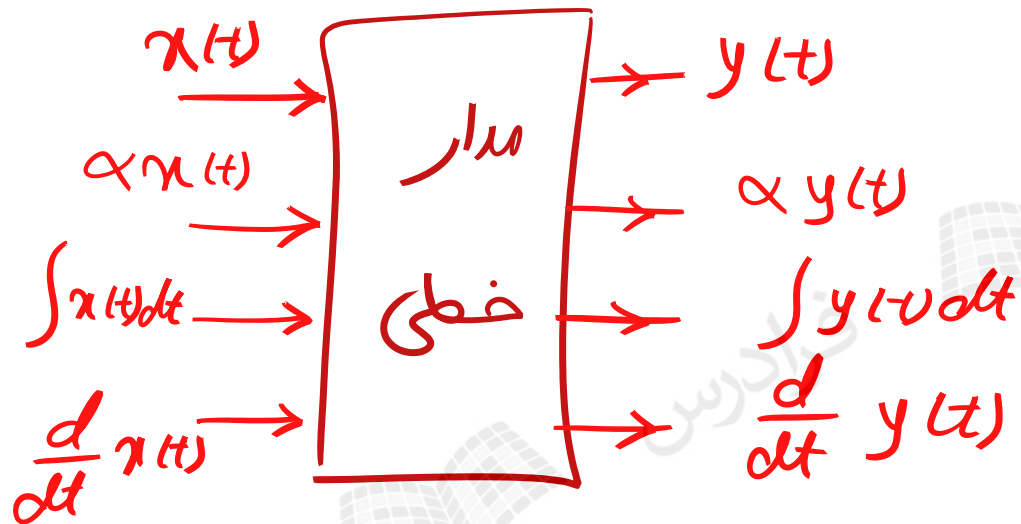
پس: $u(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) = h(t) \leftarrow$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left((1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t) \right) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \delta(t)$$

$$\rightarrow f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} s(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) = h(t)$$

مدارهای مرتبه اول



این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش مدارهای الکتریکی ۱»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvee110