

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش مدارهای الکتریکی ۱

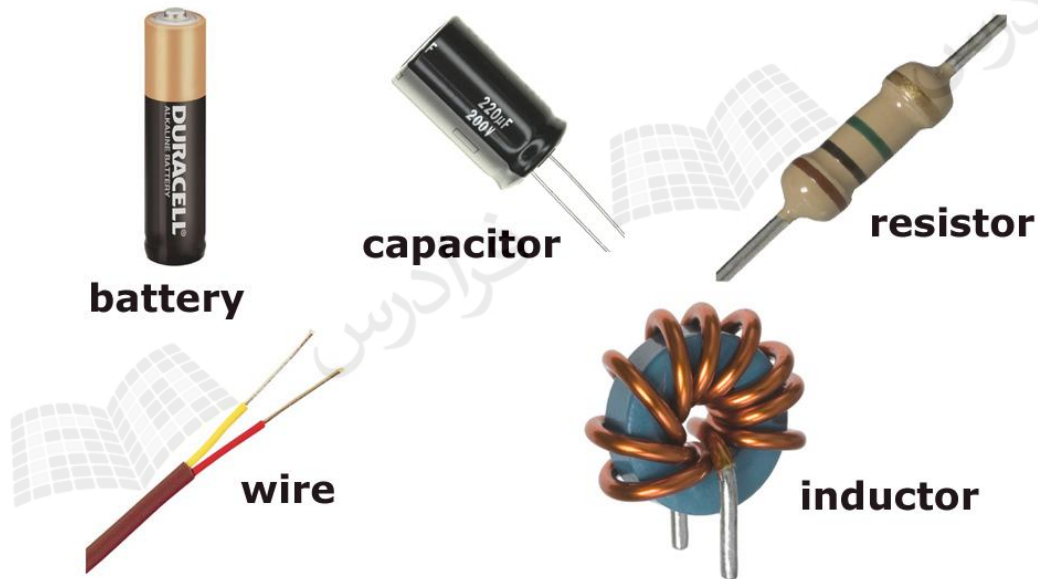
فصل هشتم: مدارهای مرتبه دوم

مدرس:

امید زندی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق گرایش کنترل
دانشگاه علم و صنعت ایران

مدارهای مرتبه دوم



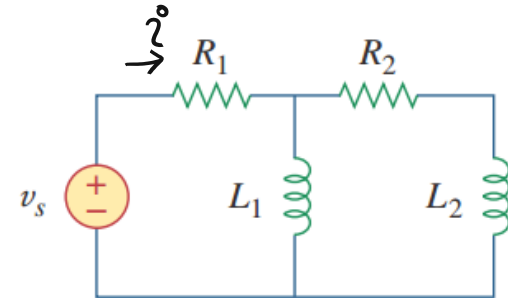
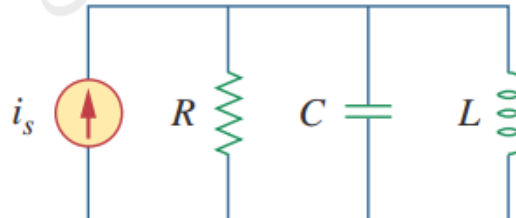
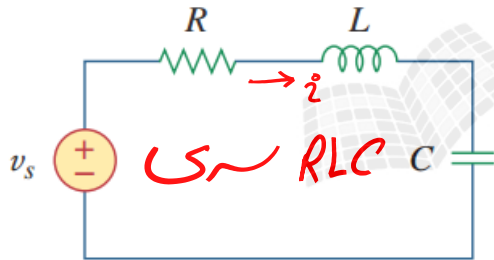
مدارهای مرتبه دوم

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \alpha \frac{di}{dt} + \beta i = \gamma v_s$$

مدارات مرتبه دوم (second-order circuit)

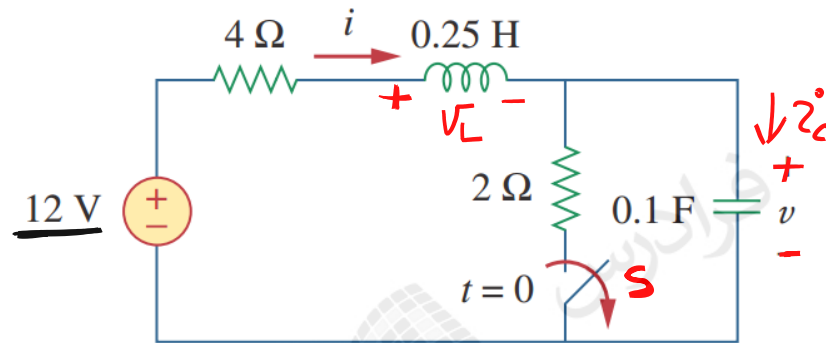
• مداراتی هستند که شامل دو المان ذخیره انرژی هستند.

• معادلات توصیف کننده مدار از نوع معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است.



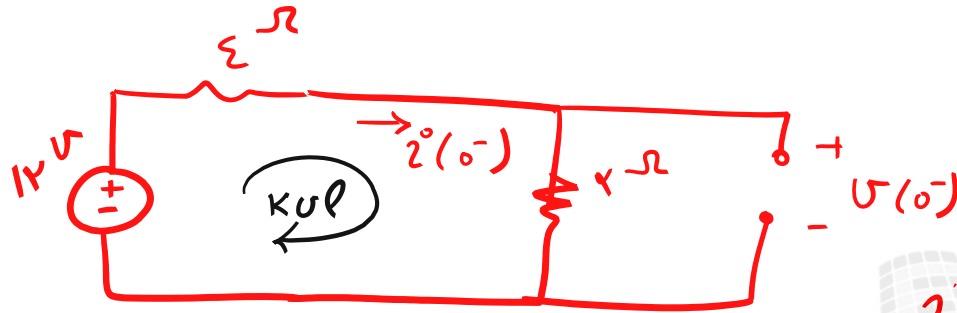
مدارهای مرتبه دوم

نحوه محاسبه شرایط اولیه و نهایی در مدارات مرتبه دوم



$$\begin{aligned}
 i(0^+) &= i(0^-) = 2 \text{ A} \\
 v(0^+) &= v(0^-) = \Sigma v \\
 \frac{d}{dt} i(0^+) &= \frac{v_L(0^+)}{L} = 0 \text{ A/s} \\
 \frac{d}{dt} v(0^+) &= \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{2}{0.1} = 20 \text{ V/s}
 \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه دوم

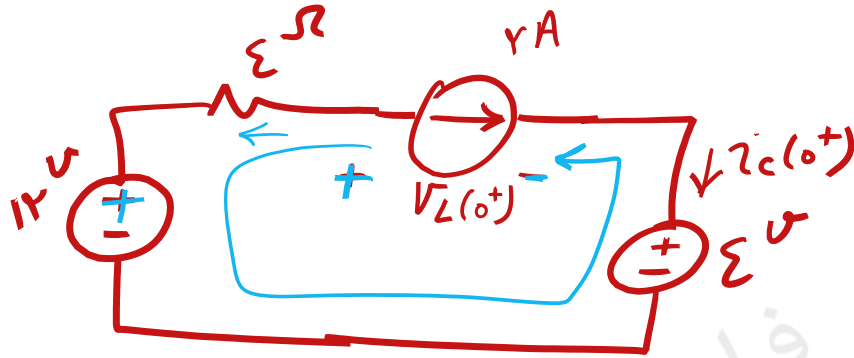


$$\begin{cases} i_c(0^-) = \frac{12}{\varepsilon + 2} = 2 \text{ A} & t < 0 \\ v(0^-) = 2 \times 2 = \varepsilon \text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C} \longrightarrow \frac{d}{dt} v_c(0^+) = \frac{i_c(0^+)}{C} \\ v_L &= L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} \longrightarrow \frac{d}{dt} i_L(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} \end{aligned}$$

* از روی مدار معادل در $t=0^+$

مدارهای مرتبه دوم

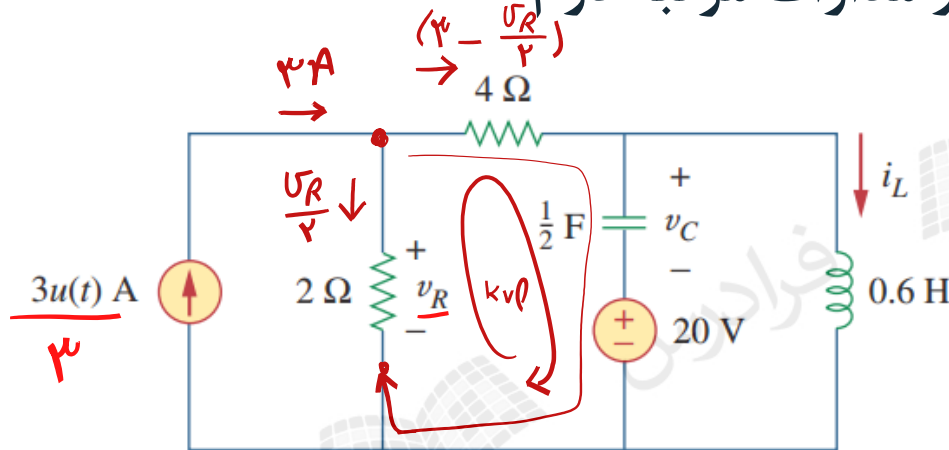


* مدار معادل در $t = 0^+$

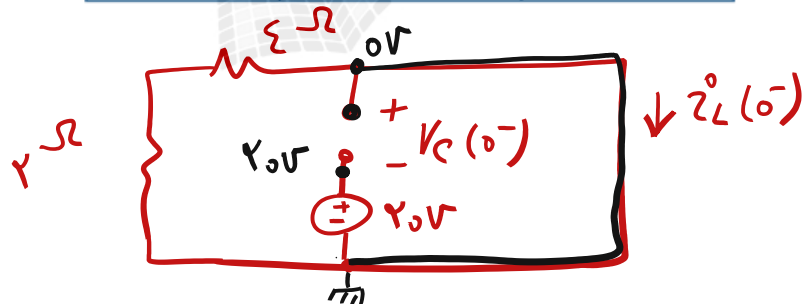
$$\begin{cases} i_c(0^+) = i(0^+) = 2A \\ V_L(0^+) = -4 \times 2 + 12 - \varepsilon = 0V \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

نحوه محاسبه شرایط اولیه و نهایی در مدارات مرتبه دوم



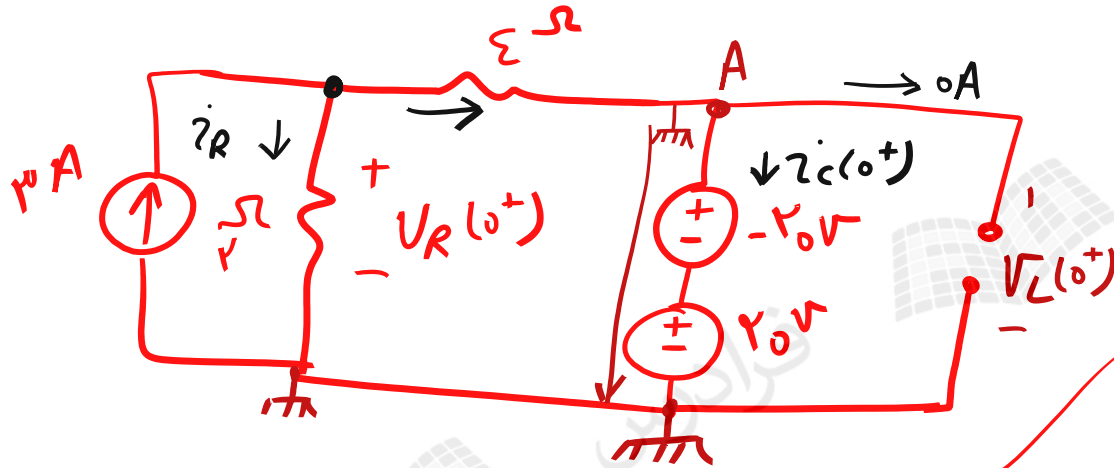
$$\begin{cases} v_R(0^+) = 6 \text{ V} \\ \frac{d}{dt} v_R(0^+) = \end{cases}$$



$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \text{ A} \\ v_C(0^-) = 0 - 20 = -20 \text{ V} \quad t < 0 \quad * \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0^+) = -20 \text{ V} \\ i_L(0^+) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم



* مدار معادل $t = 0^+$

$$V_A(0^+) = -V_0 + V_0 = 0V$$

$$V_L(0^+) = 0V$$

$$i_R = \frac{\Sigma}{\Sigma + 2} \times 3 = 1A$$

$$V_R(0^+) = \Sigma V$$

$$i_c(0^+) = 3 - 2 = 1A$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L(0^+) = 0A \\ \frac{d}{dt} V_C(0^+) = \frac{i_c(0^+)}{C} = 1 \frac{V}{s} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$V_R = \mathcal{E} \left(1 - \frac{V_R}{V} \right) + V_C + V_0$$

$$= V - V_R + V_C \Rightarrow V V_R = V V_0 + V_C$$

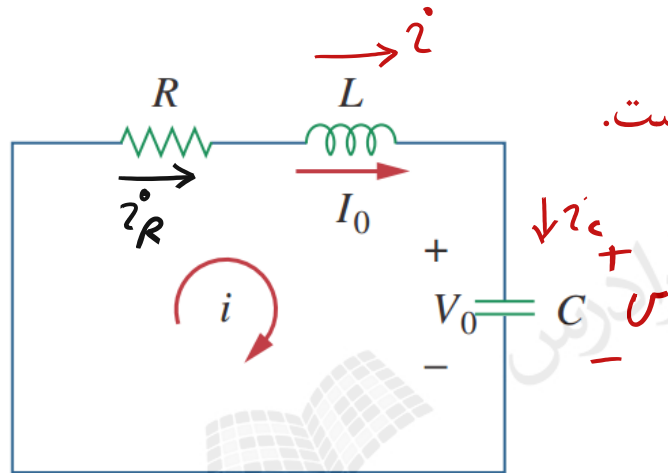
$$V \frac{d}{dt} V_R = \frac{d}{dt} V_C$$

$$t=0^+ \Rightarrow \frac{d}{dt} V_R(0^+) = \frac{1}{V} \left(\frac{d}{dt} V_C(0^+) \right) = \frac{1}{V} \frac{V_C(0^+)}{C}$$

$$= \frac{1}{V} \times V = \frac{V}{C}$$

مدارهای مرتبه دوم

پاسخ ورودی صفر مدار RLC سری



- تنها محرک مدار شرایط اولیه خازن و سلف است.

$$\begin{cases} V(0^+) = V_0 & (1) \\ i(0^+) = I_0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} V(0^+) = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{I_0}{C} \quad (2)$$

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = i = i_R$$

KVL:

$$V_R + V_L + V_C = 0 \Rightarrow RC \frac{d}{dt} V + LC \frac{d^2 V}{dt^2} + V = 0$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} v + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} v + \frac{1}{LC} v = 0 \\ v(0^+) = V_0 \quad \frac{d}{dt} v(0^+) = \frac{I_0}{C} \end{cases}$$

معادله مشخصه

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

تعریف

$$\frac{R}{L} = 2\alpha$$

ضریب میرایی

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرکانس رزونانس

مدارهای مرتبه دوم

* یادآوری معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

همگی ورودی صفر

معادله مشخصه

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$$

حالت اول λ_1, λ_2 حقیقی

$$x(t) = (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t})$$

$$x(0), \frac{dx}{dt}(0)$$

مدارهای مرتبه دوم

حالت دوم) $\lambda_1 = \lambda_2$ و حقیقی

$$x(t) = (At + B)e^{+\lambda_1 t}$$

حالت سوم) $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm j\omega$ مختلط

$$\rightarrow x(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

حالت چهارم) $\lambda_1, \lambda_2 = \pm j\omega$ موهومی خالص

$$x(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

if $\alpha > \omega_0 \rightarrow \lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0, \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$

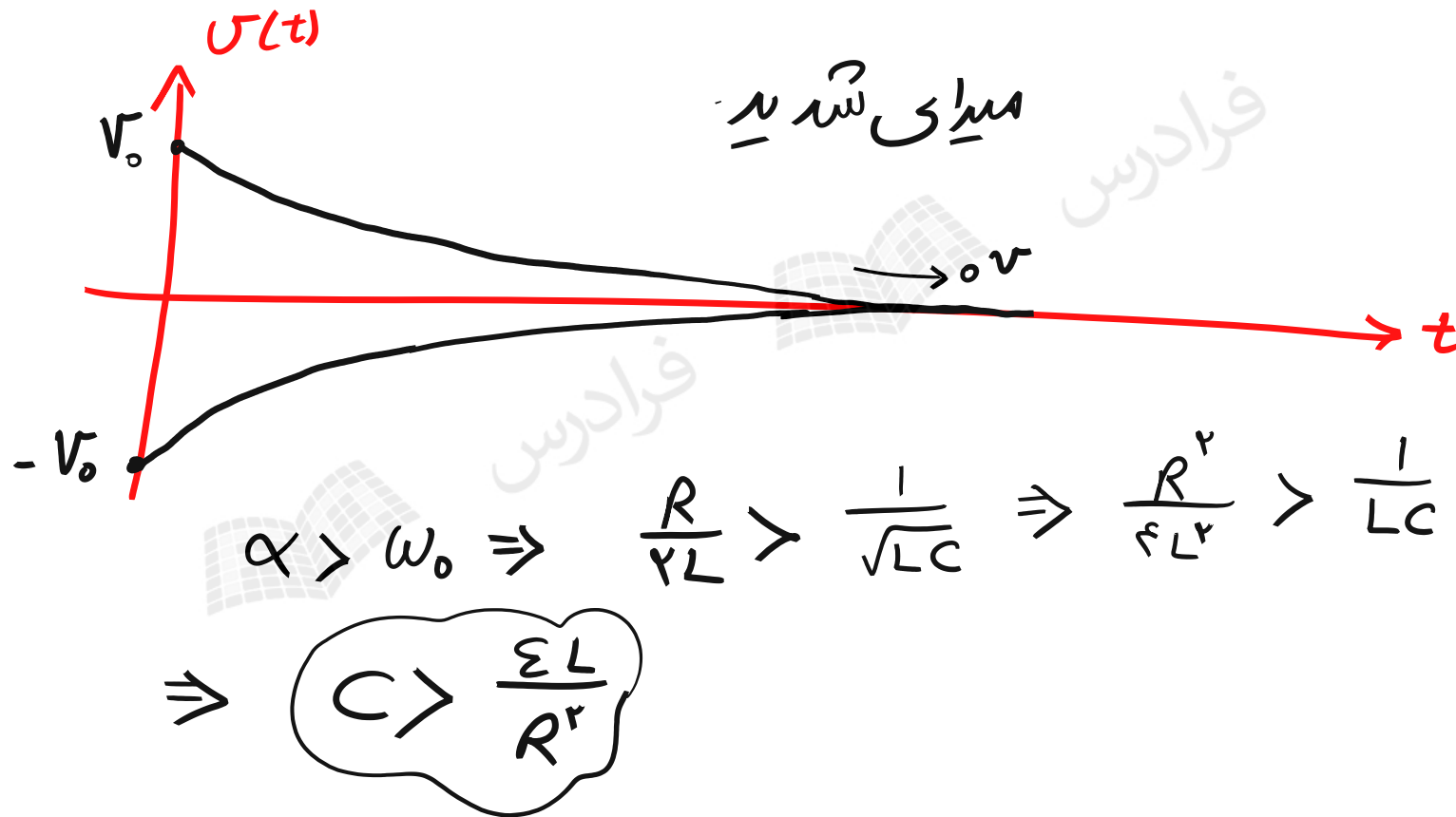
$$v(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

$$v(0^+) = V_0 \Rightarrow A e^0 + B e^0 = V_0 \Rightarrow (A + B = V_0)$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = \frac{I_0}{C} \Rightarrow (\lambda_1 A + \lambda_2 B = \frac{I_0}{C})$$

* میرای سده Overdamped

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم

$$\text{if } \alpha = \omega_0 \quad \underline{L} \quad C = \frac{4L}{R^2}$$

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha$$

$$V(t) = (At + B) e^{-\alpha t}$$

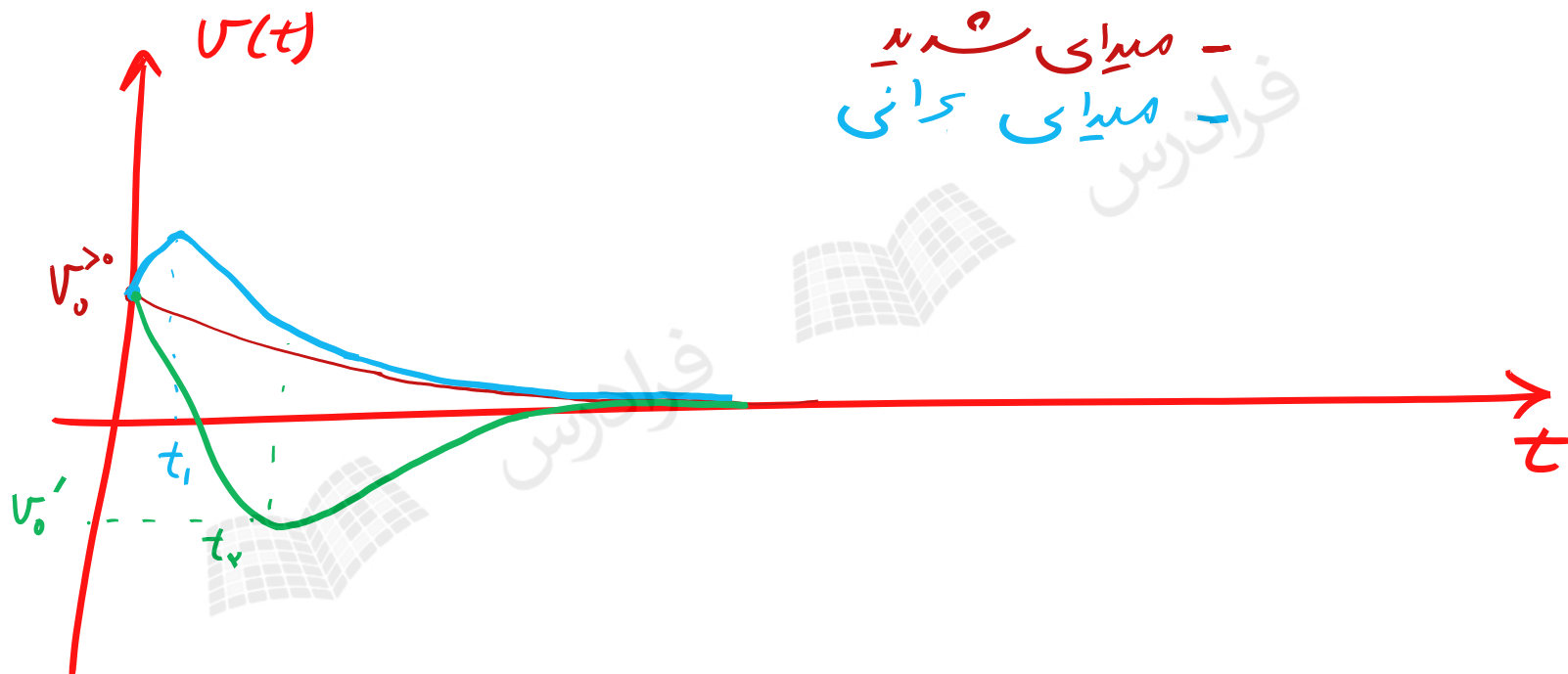
$$V(0^+) = B = V_0$$

$$\frac{d}{dt} V(0^+) = A - \alpha B = \frac{I_0}{C} \Rightarrow$$

* میرای بحرانی
Critically Damped

$$A = \alpha V_0 + \frac{I_0}{C}$$

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم

$$\text{if } \alpha < \omega_0 \quad C < \frac{\Sigma L}{R^2}$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d = -\alpha \pm j\omega$$

ω_d : فرکانس طبیعی میرا شده
 ω_0 : فرکانس طبیعی نامیرا

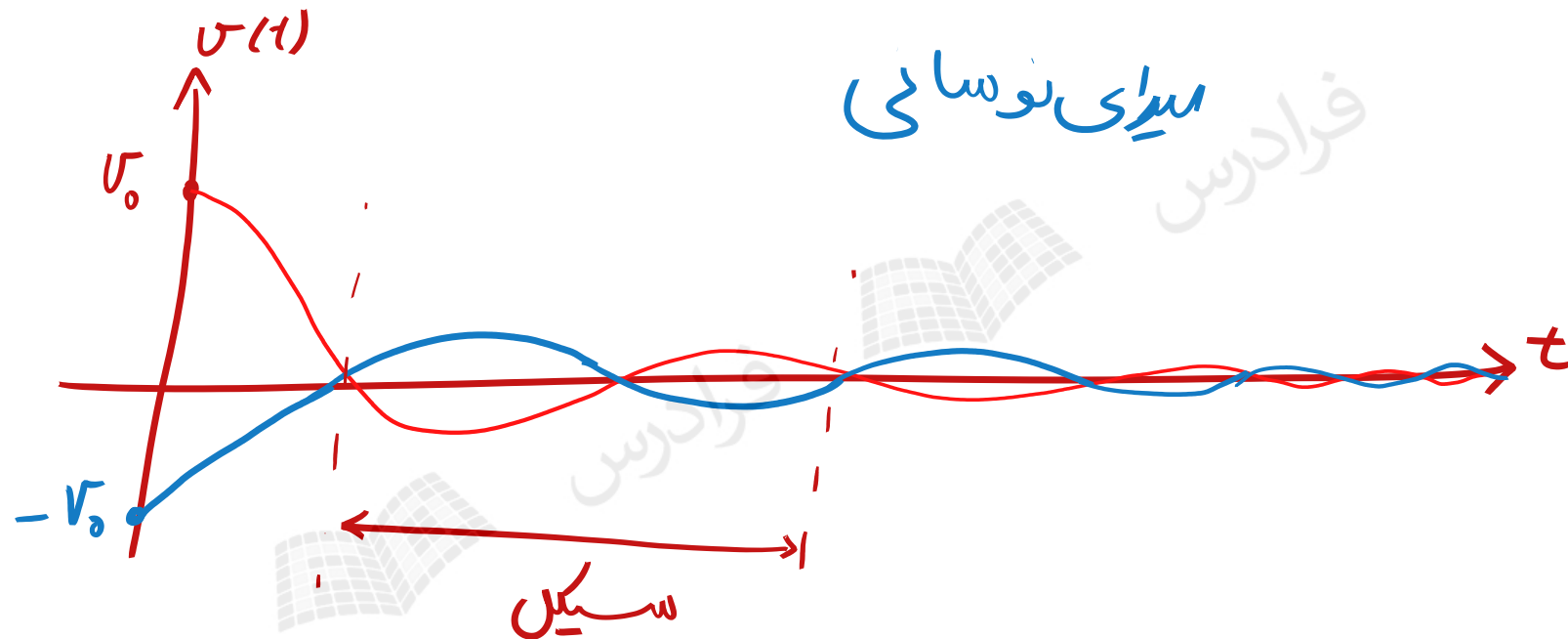
$$v(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$A = v(0^+) = V_0$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = B \omega_d - \alpha A = \frac{I_0}{C} \Rightarrow B = \frac{\alpha V_0 + \frac{I_0}{C}}{\omega_d}$$

* میرای نوسانی (زیر میرا Underdamped)

مدارهای مرتبه دوم

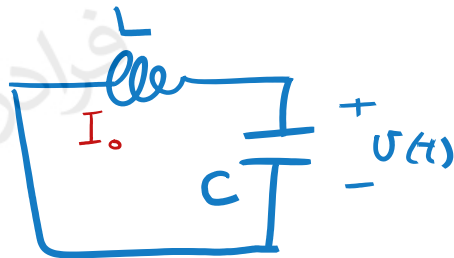


مدارهای مرتبه دوم

if $\alpha = 0$

$$\frac{R}{\sqrt{L}} = 0 \rightarrow R = 0$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \pm \omega_0 j$$



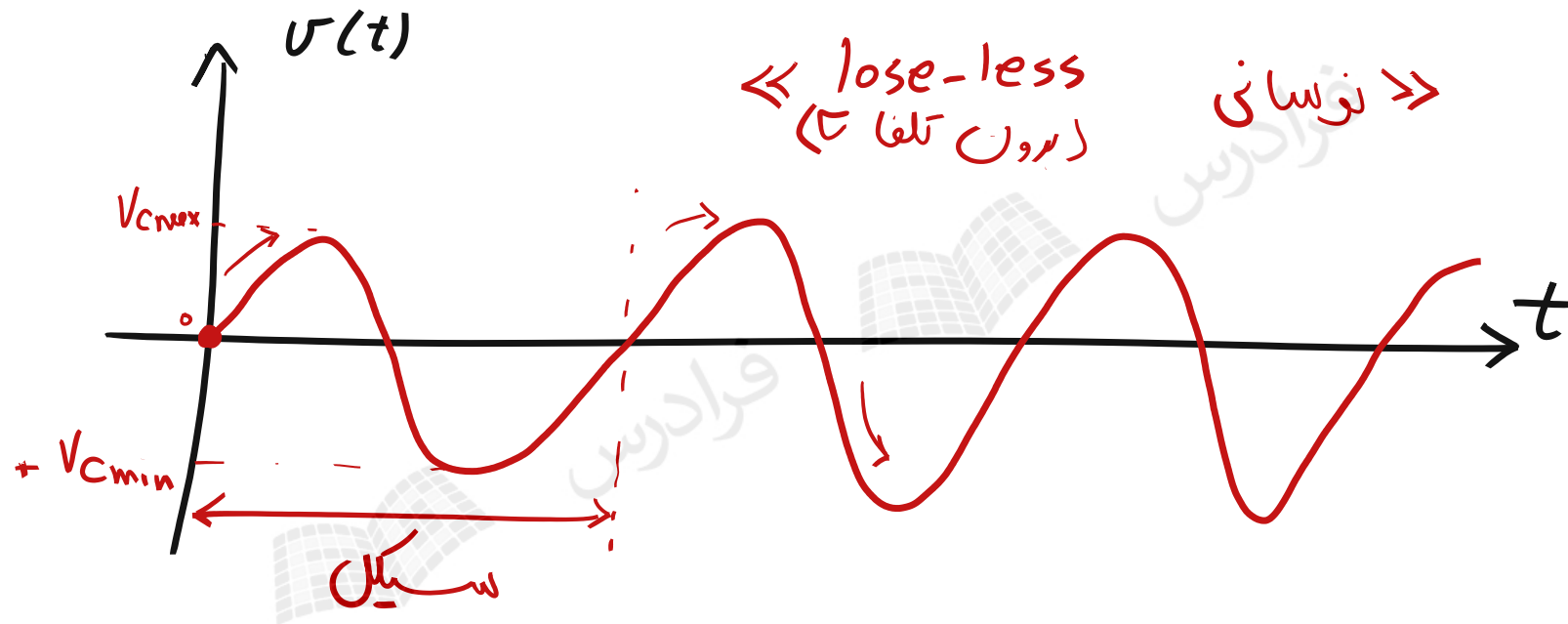
$$V(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$A = V_0$$

$$\omega_0 B = \frac{I_0}{C} \Rightarrow B = \frac{I_0}{\omega_0 C}$$

$$V(t) = \left(V_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t \right)$$

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم

فرادرس

انرژی ذخیره شده در یک سیمکس
انرژی تلف شده در یک سیمکس

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

ضریب کیفیت

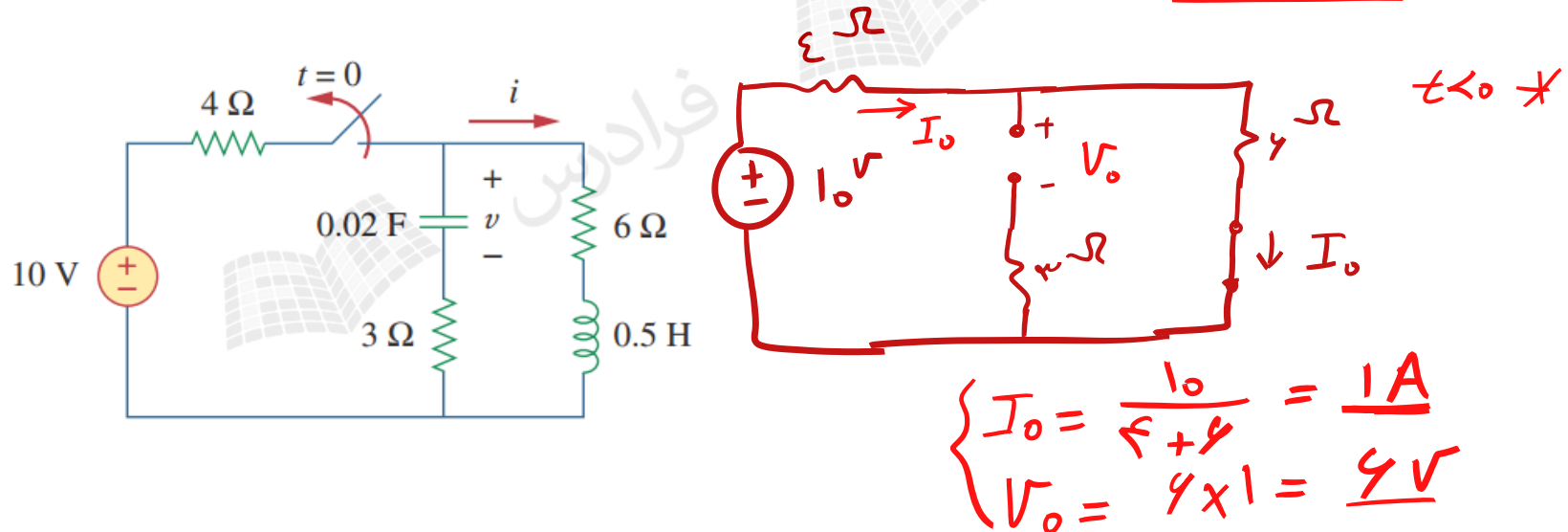
$$1 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

فرادرس

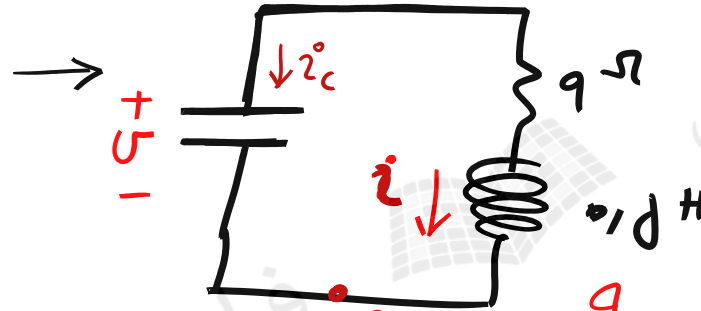
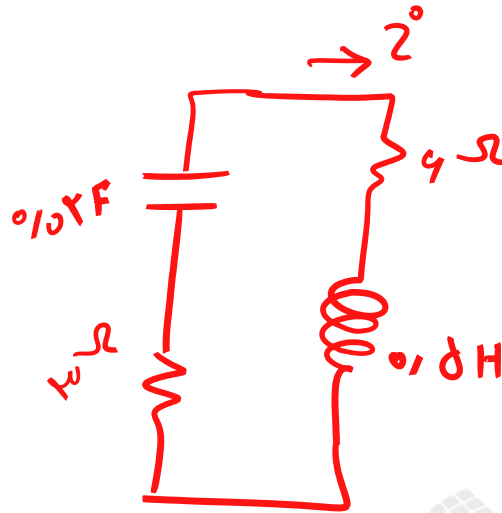
$i \neq 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\rightarrow$	میرای شدید
$i \neq 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\rightarrow$	میرای بحرانی
$i \neq 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\rightarrow$	میرای نوسانی
$i \neq 0$	$Q = \infty$	$\rightarrow$	نوسانی

مدارهای مرتبه دوم

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی بسته بوده است و در زمان صفر باز می شود. جریان سلف را برای زمان های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



مدارهای مرتبه دوم



$$i = -i_c \quad t > 0$$

$$\alpha = \frac{R}{L} = \frac{3}{0.08} = 37.5 \rightarrow \alpha = 37.5$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.02 \times 0.08}} = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{25}{37.5} = 0.667 < 1$$

نوع پاسخ نوسانی است.

مدارهای مرتبه دوم

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm \sqrt{9^2 - 10^2}$$

$$= -9 \pm \sqrt{-19} = -9 \pm \sqrt{19} j$$

$$v(t) = e^{-9t} (A \cos \sqrt{19} t + B \sin \sqrt{19} t), \quad \omega_d = \sqrt{19}$$

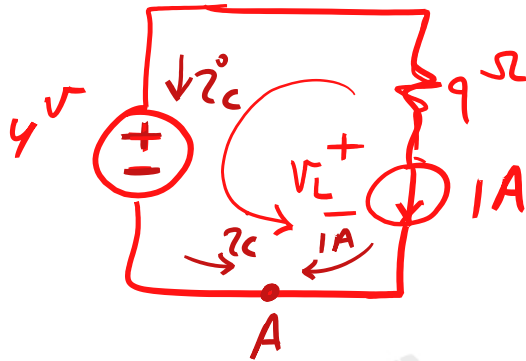
$$v(0^+) = A = 4 \Rightarrow A = 4$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = \sqrt{19} B - 9A = \frac{\dot{v}_c(0^+)}{C} = \frac{-1}{0.02} = -50$$

$$\sqrt{19} = 9 \times 4 - 50 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{19}} \Rightarrow B = \frac{\varepsilon}{\sqrt{19}}$$

$$v(t) = e^{-9t} \left(4 \cos \sqrt{19} t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{19}} \sin \sqrt{19} t \right)$$

مدارهای مرتبه دوم



$$i_c = -1A$$

$$v_L^{(0+)} = -9 \times 1 + 4 = -5$$

در $t = 0^+$ معادل

$$i_c = -i_c = -C \frac{dv}{dt} = -0.02 \left(-9e^{-9t} (4\cos\sqrt{19}t + \frac{2}{\sqrt{19}} \sin\sqrt{19}t) + (4\cos\sqrt{19}t - 4\sqrt{19} \sin\sqrt{19}t) e^{-9t} \right)$$

$$i_c = -0.02 \left((-9 \times 4 + 4) \cos\sqrt{19}t + \left(\frac{-36}{\sqrt{19}} - 4\sqrt{19} \right) \sin\sqrt{19}t \right) e^{-9t}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\rightarrow i(t) = \left(\cos \sqrt{19} t + \frac{10}{\sqrt{19}} \sin \sqrt{19} t \right) e^{-9t}$$

$$i(0^+) = \left(\cos 0 + \frac{10}{\sqrt{19}} \sin 0 \right) e^{-9 \times 0} = 1 \quad \checkmark$$

$$RC: \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0$$

$$\tau = RC \quad x(0^+)$$

$$RLC: \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(0^+), \quad \frac{d}{dt} x(0^+)$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\frac{d^2 i^\circ}{dt^2} + 18 \frac{di^\circ}{dt} + 100 i^\circ = 0$$

$$i^\circ(t) = e^{-9t} (A \cos \sqrt{19} t + B \sin \sqrt{19} t)$$

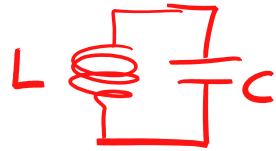
$$i^\circ(0^+) = 1A$$

$$\frac{di^\circ}{dt}(0^+) = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{-\frac{12}{0.5}}{1} = -24$$

$$t=0 \rightarrow i(0^+) = A = 1$$

$$\frac{d}{dt} i(0^+) = \sqrt{19} B - 9A = -24 \Rightarrow B = \frac{12}{\sqrt{19}}$$

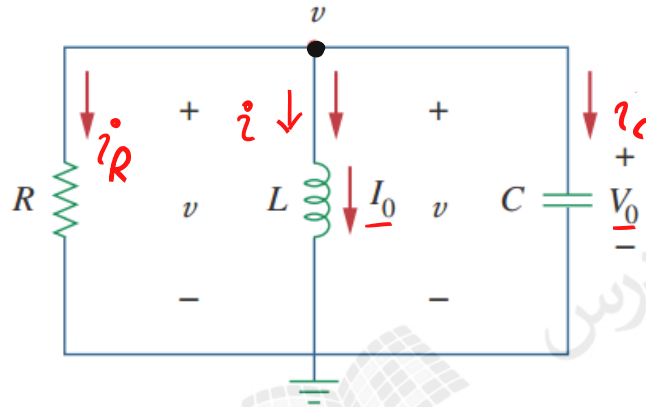
$$i^\circ(t) = e^{-9t} \left(\cos \sqrt{19} t + \frac{12}{\sqrt{19}} \sin \sqrt{19} t \right)$$



$\uparrow R = \infty$

مدارهای مرتبه دوم

پاسخ ورودی صفر مدار RLC موازی



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{L \frac{d}{dt} i}{R} = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i$$

$$v_C = v = L \frac{d}{dt} i$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = LC \frac{d^2}{dt^2} i$$

$$\text{KCL: } i_R + i_L + i_C = 0 \Rightarrow LC \frac{d^2}{dt^2} i + \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i + i = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} i + \left(\frac{1}{RC}\right) \frac{d}{dt} i + \left(\frac{1}{LC}\right) i = 0$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\rightarrow (\gamma\alpha = \frac{1}{RC} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC})$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} i + \gamma\alpha \frac{d}{dt} i + \omega_0^2 i = 0 \right) \quad \Delta = \lambda^2 + \gamma\alpha \lambda + \omega_0^2$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma\alpha} \rightarrow Q < \frac{1}{2} \rightarrow \text{میرای سده}$$

$$Q = \frac{1}{2} \rightarrow \text{میرای بحرانی}$$

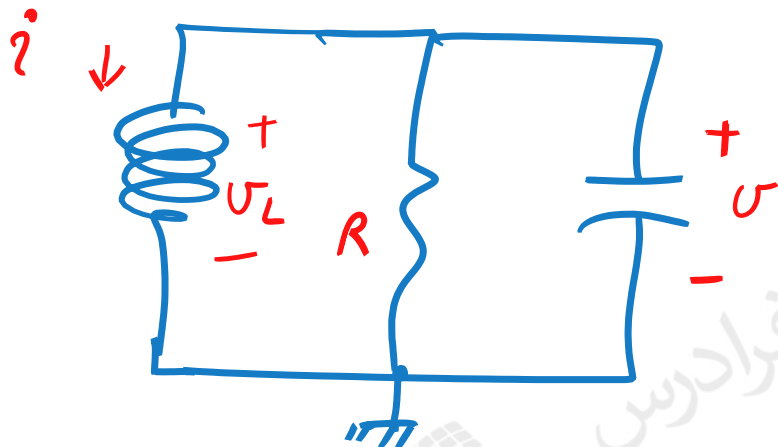
$$Q > \frac{1}{2} \rightarrow \text{میرای نوسانی}$$

$$R = \infty \leftarrow \alpha = 0$$

$$Q = \infty \rightarrow \text{نوسانی}$$

$$i(t) = (At + B)e^{\lambda t}$$

مدارهای مرتبه دوم



$$i(0^+) = I_0$$

$$\frac{d}{dt} i(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

$$B = I_0$$

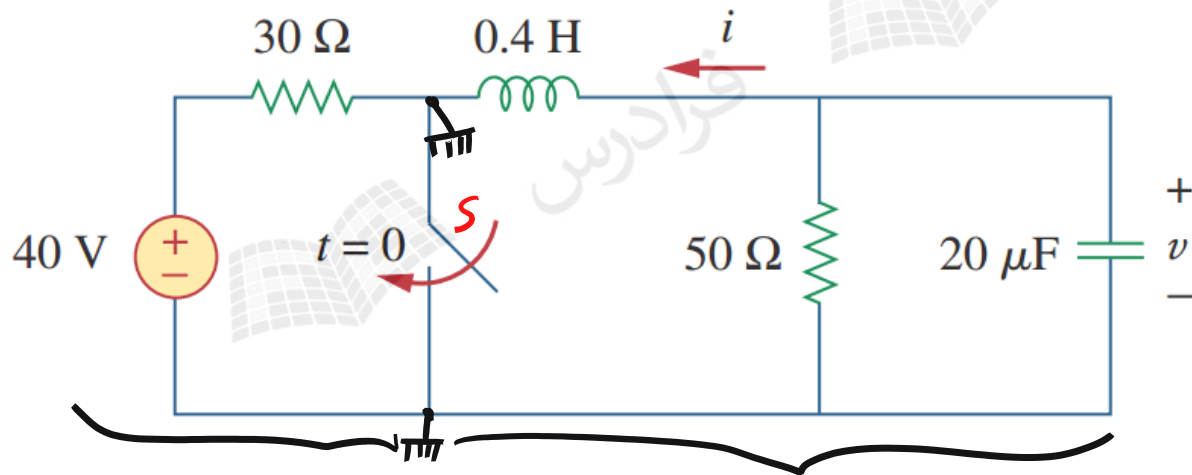
$$A + \lambda B = \frac{V_0}{L}$$

$$\Rightarrow A = \frac{V_0}{L} - \lambda I_0$$

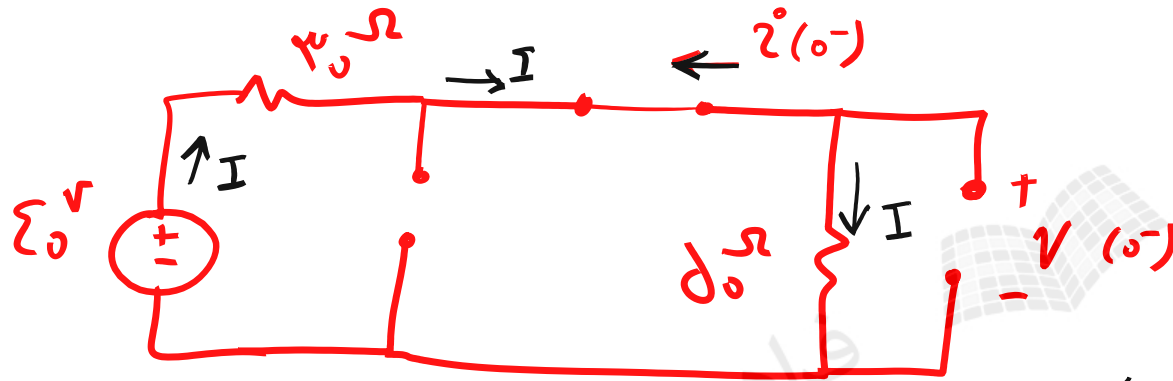
$$i(t) = \left(\left(\frac{V_0}{L} - \lambda I_0 \right) t + I_0 \right) e^{-\lambda t}$$

فصل هشتم – مدارهای مرتبه دوم

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی باز بوده است و در زمان صفر بسته می شود. ولتاژ خازن را برای زمان‌های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



مدارهای مرتبه دوم

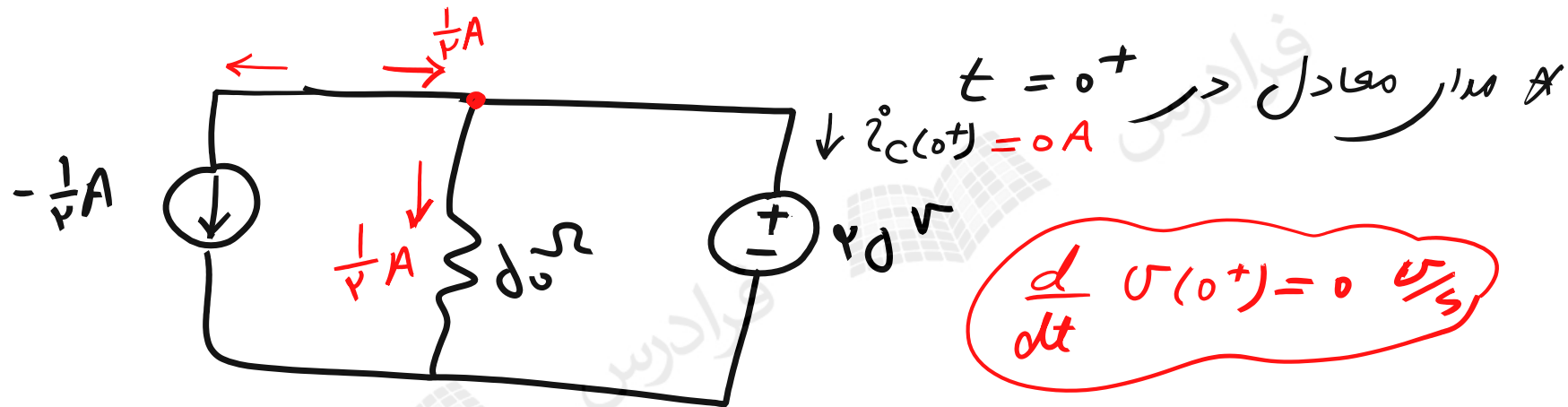


$(t=0^- \quad \leq t < 0)$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0 + L_0} = \frac{1}{r} A \rightarrow \begin{cases} i(0^-) = -\frac{1}{r} A \\ V(0^-) = L_0 \times I = \underline{r L V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(0^+) = -\frac{1}{r} A \\ V(0^+) = r L V \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم



$$t > 0$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$$

$$2\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{0.002 \times 20 \times 10^{-6}} = 1000$$

$$\alpha = 500$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.002 \times 20 \times 10^{-6}}} = \left(\frac{1000}{\sqrt{2}} \right) = \frac{500}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = \lambda^2 + 1000\lambda + \frac{10^6}{2} = 0$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 \pm \sqrt{500^2 - \frac{10^6}{2}}$$

$$\lambda = -154, -146$$

* میرای شدید

مدارهای مرتبه دوم

$$V(t) = A e^{-185t} + B e^{-144t}$$

$$V(0^+) = A + B = 20$$

$$\frac{dV}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow -185A - 144B = 0$$

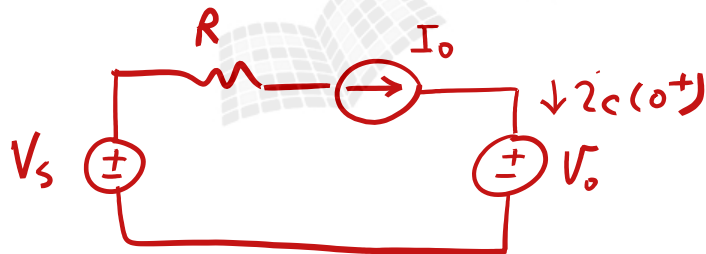
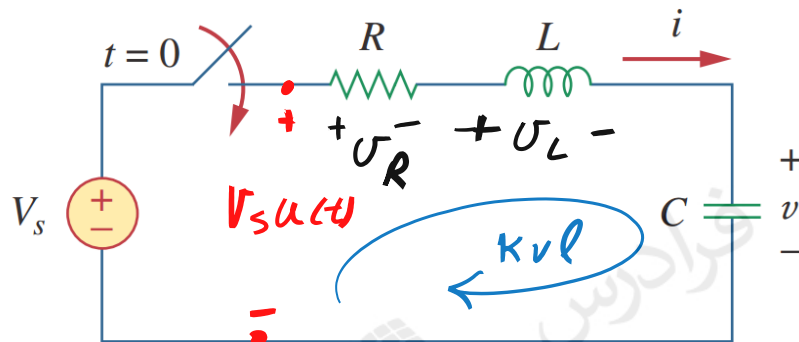
$$(185 - 144)B = 20 \times 185$$

$$\begin{cases} B = \frac{20 \times 185}{185 - 144} = 20,15 \\ A = -5,15 \end{cases}$$

$$V(t) = (-5,15 e^{-185t} + 20,15 e^{-144t})$$

مدارهای مرتبه دوم

پاسخ پله مدار RLC سری



$$\begin{cases} v(0^+) = V_0 & (1) \\ i(0^+) = I_0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = \frac{I_0}{C} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow i &= C \frac{d}{dt} v \\ v_L &= L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2}{dt^2} v \\ v_R &= Ri = RC \frac{d}{dt} v \end{aligned}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$(V_s u(t) = R \frac{d}{dt} v + LC \frac{d^2}{dt^2} v + v) \times \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} v + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} v + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{LC} V_s u(t)$$

$$\frac{R}{L} = 2\alpha$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

 $t \geq 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} v + 2\alpha \frac{d}{dt} v + \omega_0^2 v = [\omega_0^2 V_s u(t)] = \omega_0^2 V_s$$

$$v(t) = v_{tr}(t) + v_{ss}(t)$$

$$= (At + B)e^{\lambda t} + V_s$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\rightarrow \left(a \frac{d^2}{dt^2} x + b \frac{d}{dt} x + c x \right) = f(t) = F_0$$

پادآوری:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

↓ ↓
 جواب همگن جواب خصوصی

← جواب حالت گذرا (x_{tr})

→ جواب حالت دائم (x_{ss})

تقریب x_{tr}

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0 \rightarrow x_{tr} = (At + B)e^{\lambda t}$$

تقریب x_p

$$x_p = \bar{F}_0 \rightarrow a x_0 + b x_0 + c x \bar{F}_0 = F_0 \Rightarrow \bar{F}_0 = \frac{F_0}{c}$$

$$x(t) = (At + B)e^{\lambda t} + \frac{F_0}{c}$$

مدارهای مرتبه دوم

و ω فاز

$$v(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + v_s$$

$$v(0^+) = B + v_s = v_0 \Rightarrow$$

$$B = v_0 - v_s$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = A + \lambda B = \frac{I_0}{C} \Rightarrow$$

$$A = \frac{I_0}{C} - \lambda(v_0 - v_s)$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v_R = Ri = Rc \frac{dv}{dt}$$

مدارهای مرتبه دوم

میدای عری

* پاسخ حالت صفر $\hat{c}$

$$\underline{v}(t) = \left\{ (\lambda v_s t - v_s) e^{\lambda t} + v_s \right\} \quad v_0 = 0 \quad I_0 = 0$$

$$\begin{cases} v_s u(t) \\ v_s \delta(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v(t) \\ \frac{d}{dt} v(t) \end{cases} = \lambda v_s e^{\lambda t} + (\lambda v_s t - v_s) \lambda e^{\lambda t}$$

$$= \lambda^2 v_s t e^{\lambda t} = h(t)$$

if $v_s = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} s(t) = ((\lambda t - 1) e^{\lambda t} + 1) u(t) \\ h(t) = (\lambda^2 t e^{\lambda t}) u(t) \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\Delta = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2$$

ی-RLC

$$(2\alpha = \frac{R}{L})$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$x(t) = x_{tr} + x_{ss}$ از روی $\frac{d}{dt}x(0^+), x(0^+)$ می‌انید.

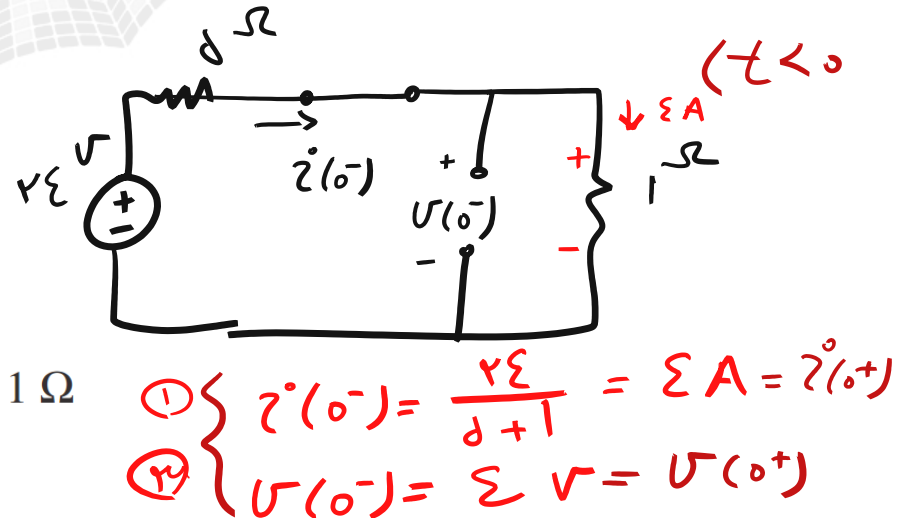
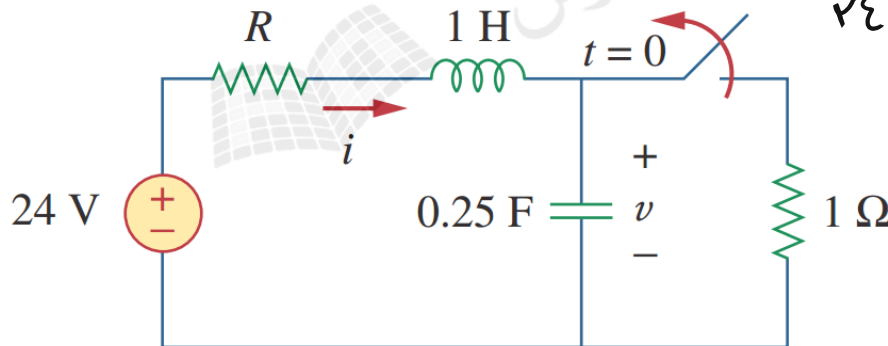
از روی تحلیل
DE مدار بدست
می‌آید

$Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ $\alpha > \omega_0$
 $(At + B)e^{\lambda t}$ $\alpha = \omega_0$
 $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ $\alpha = 0$

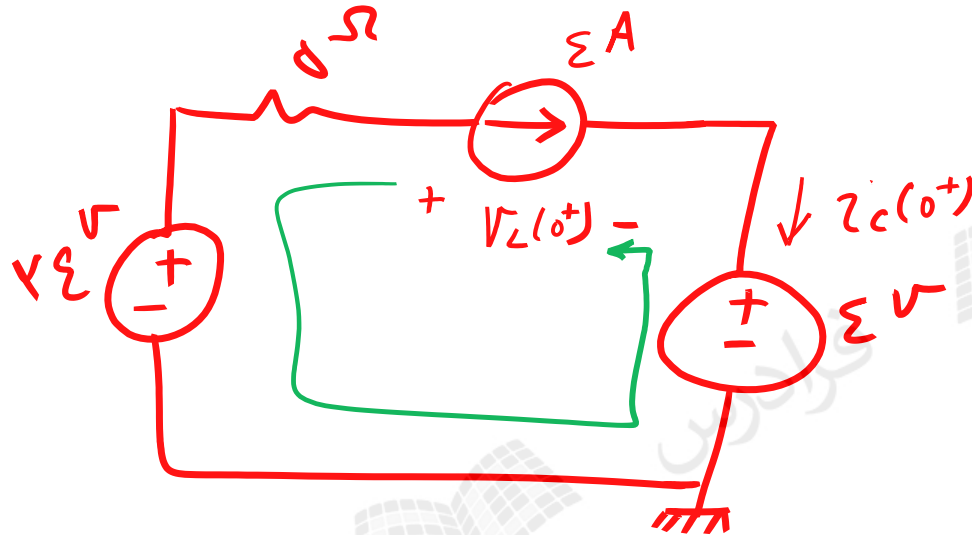
مدارهای مرتبه دوم

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی بسته بوده است و در زمان صفر باز می شود. ولتاژ خازن و جریان سلف را برای زمان‌های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.

$$\underline{R = 5 \Omega}$$



مدارهای مرتبه دوم



در مدار معادل در $t = 0^+$

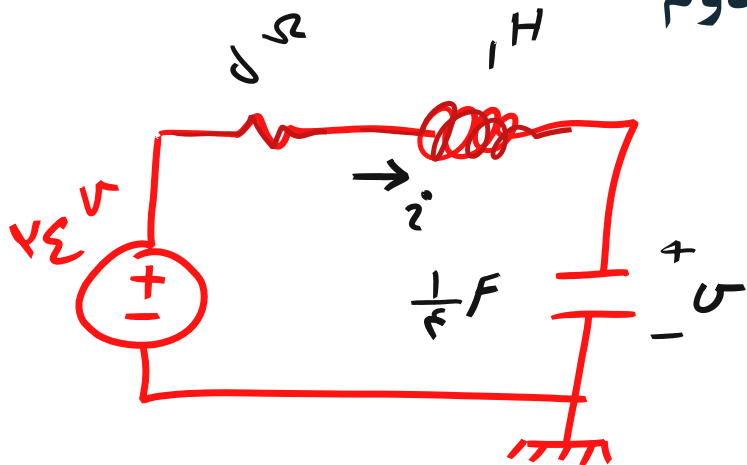
$$i_C'(0^+) = \varepsilon A$$

$$(1) \quad \frac{d}{dt} v(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{4}} = 4\varepsilon \frac{V}{s}$$

$$v_L(0^+) = -0 \times \varepsilon + 2\varepsilon - \varepsilon = 0 V$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} i(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = 0 A/s$$

مدارهای مرتبه دوم



$$\gamma\alpha = \frac{R}{L} = \omega$$

$$\alpha = \gamma_1 d$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times \frac{1}{4}}} = 2 \text{ } \gamma_s$$

$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow \text{میرای سُد}$$

$$t > 0$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\gamma_1 d \pm \sqrt{\gamma_1 d^2 - \gamma^2} = -1 \text{ و } -2$$

$$\begin{cases} V(t) = A e^{-t} + B e^{-2t} + V_{ss} & , V_{ss} = \gamma_s V \\ i(t) = C e^{-t} + D e^{-2t} + i_{ss} & , i_{ss} = 0 \text{ A} \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\begin{cases}
 A + B + 2\varepsilon = \varepsilon \\
 -A - \varepsilon B = 14
 \end{cases}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 A + B = -2\varepsilon \\
 -A - 4B = 14
 \end{cases}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 -3B = -\varepsilon \\
 B = \frac{\varepsilon}{3} \\
 A = -\frac{4\varepsilon}{3}
 \end{cases}$$

$$v(t) = \left(2\varepsilon - \frac{4\varepsilon}{3} e^{-t} + \frac{\varepsilon}{3} e^{-\varepsilon t} \right) u(t)$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\begin{cases} C + D = \varepsilon \\ -C - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow -3D = \varepsilon$$

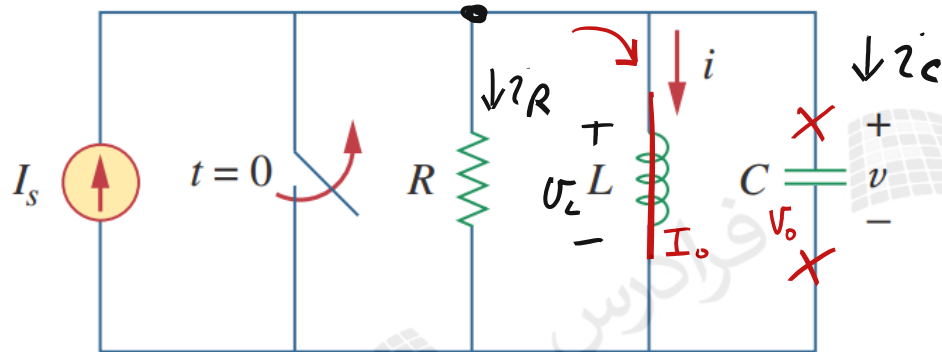
* جواب سلف:

$$D = -\frac{\varepsilon}{3} \rightarrow C = \frac{1\varepsilon}{3}$$

$$i(t) = \left(\frac{1\varepsilon}{3} e^{-t} - \frac{\varepsilon}{3} e^{-4t} \right) u(t)$$

$$i'(t) = C \frac{dv}{dt}$$

مدارهای مرتبه دوم



پاسخ پله مدار RLC موازی

$$(V_0 = 0, I_0 = 0)$$

$$\rightarrow V_L = L \frac{di}{dt} = V_C$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} = LC \frac{d^2 i}{dt^2}$$

$$i_R = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

$$i_R + i_L + i_C = I_s \Rightarrow \left(LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = I_s \right) \times \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{LC} I_s$$

مدارهای مرتبه دوم

$$I_s = u(t)$$

$$\gamma\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma\alpha \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \times 1 = \omega_0^2 \quad t \geq 0$$

$$z(t) = z_{tr}(t) + z_{ss}(t) = z_{tr}(t) + 1$$

$$\begin{array}{ll} \alpha > \omega_0 & \alpha < \omega_0 \\ \swarrow & \searrow \\ \underline{A}e^{\lambda_1 t} + \underline{B}e^{\lambda_2 t} & e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \end{array}$$

مدارهای مرتبه دوم

* $\alpha < \omega_0$ (میلر نوسانی)

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + 1$$

$$i(0^+) = I_0 = 0 \Rightarrow A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

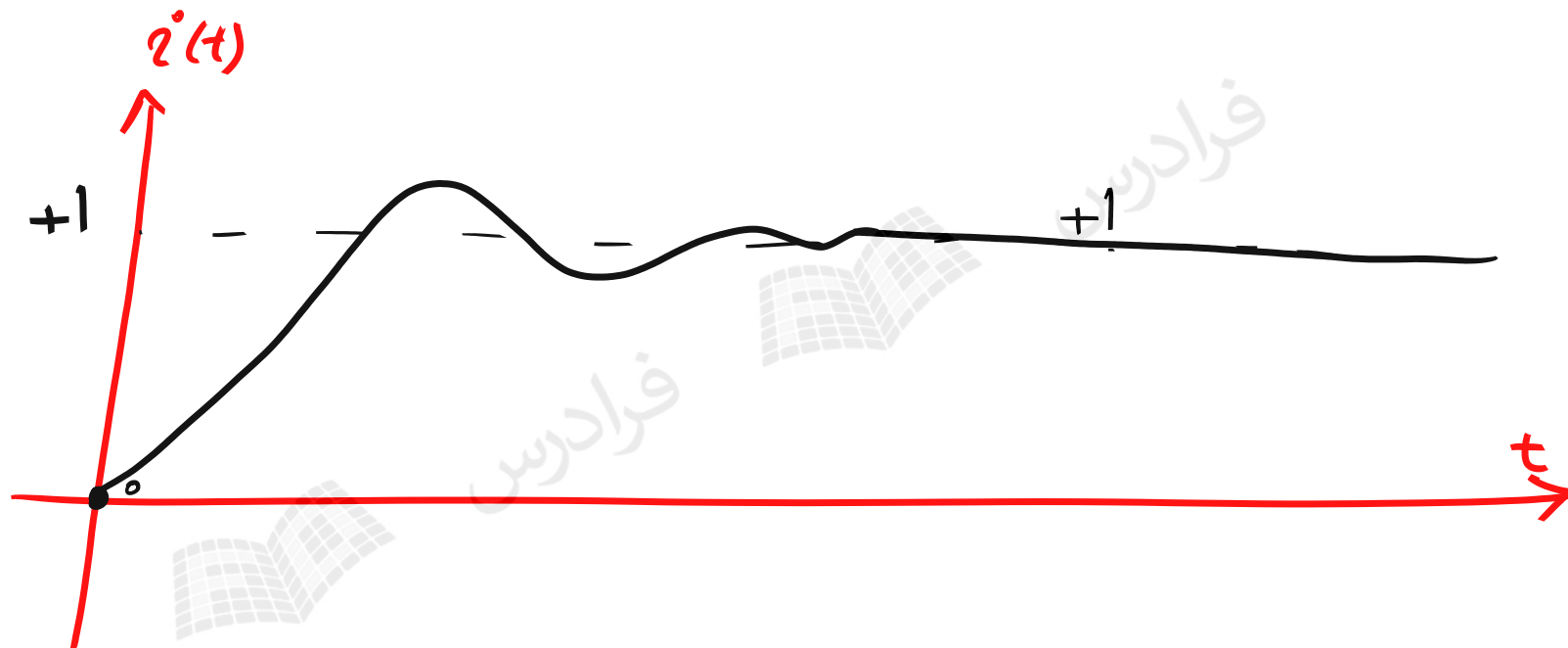
$$\frac{d}{dt} i(0^+) = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{V_C(0^+)}{L} = \frac{0}{L} = 0$$

$$B \omega_d - \alpha A = 0 \Rightarrow B = -\frac{\alpha}{\omega_d}$$

باسخ حالت
صفر

$$i(t) = \left(e^{-\alpha t} \left(-\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right) + 1$$

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

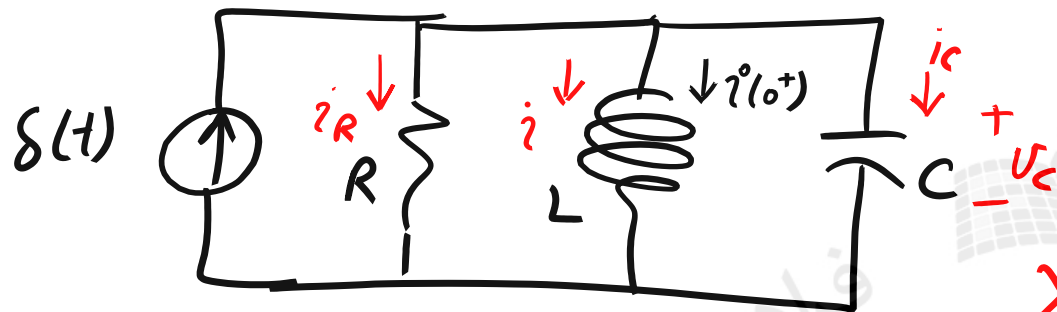
$$= \frac{d}{dt} \left(e^{-\alpha t} \left(-\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) + 1 \right)$$

$$= \left(\cancel{\alpha \cos \omega_d t} + \frac{\alpha^2}{\omega_d} \sin \omega_d t + \omega_d \sin \omega_d t - \cancel{\alpha \cos \omega_d t} \right) e^{-\alpha t}$$

$$h(t) = \left[\left(\frac{\alpha^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \sin \omega_d t \right] e^{-\alpha t}$$

$$U_s = \delta(t) \Rightarrow i(0^+) = 0 \text{ A}$$

مدارهای مرتبه دوم



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$i'(0^+) =$$

$$X \begin{cases} i_R = \alpha \delta(t) \\ V_R = \alpha R \delta(t) = V_C \\ i_C = C \frac{d}{dt} V_C = CR \alpha \frac{d}{dt} \delta(t) \end{cases}$$

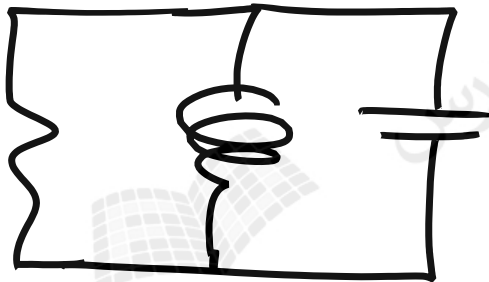
$$* \begin{cases} i = \alpha \delta(t) \\ V_L = L \alpha \frac{d}{dt} \delta(t) \\ i_C = LC \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta(t) \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

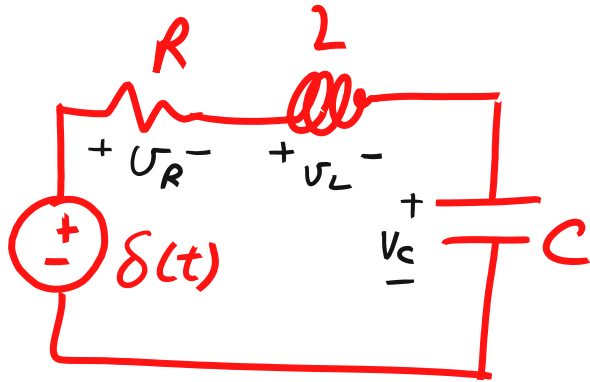
$$i_c = \delta(t)$$

$$V_C^{(0+)} = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_c dt = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{C}$$

← = 1 →



مدارهای مرتبه دوم



$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \\ V_C(0^-) = 0 \end{cases}$$

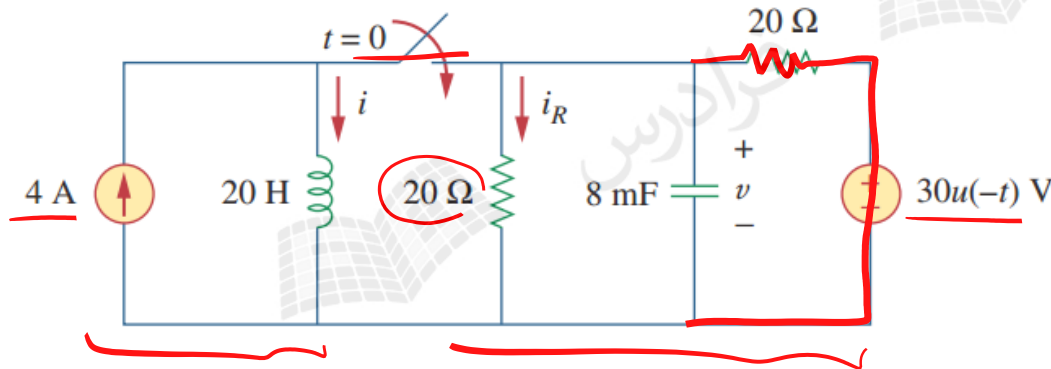
$$V_L = \delta(t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} V_L dt$$

$$i_L(0^+) = 0 + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{L}$$

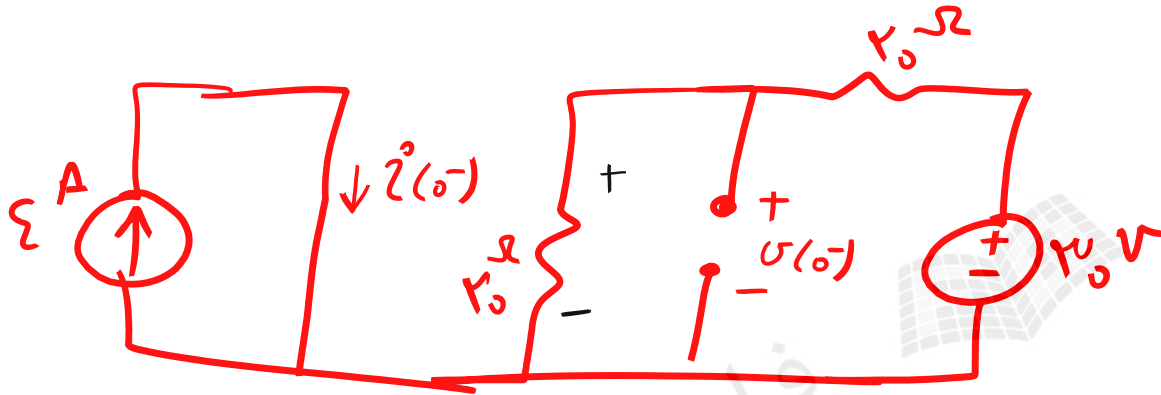
مدارهای مرتبه دوم

مثال – کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی باز بوده است و در زمان صفر بسته می شود. ولتاژ خازن را برای زمان های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



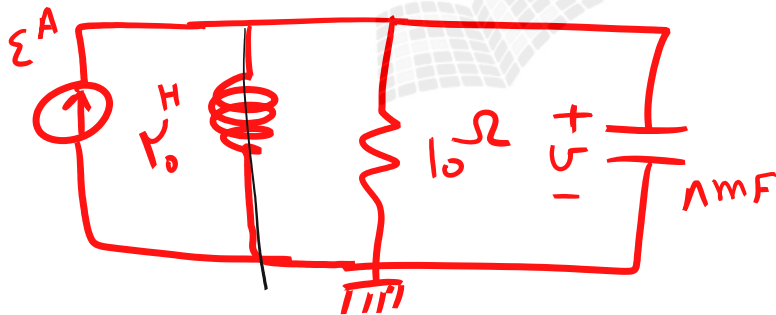
$$u(-t) = \begin{cases} +1 & -t > 0 \\ 0 & -t < 0 \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم



$$\begin{cases} i(0^-) = \varepsilon A & (t < 0) \\ V(0^-) = \frac{1}{4} \times 40 = 10V \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(0^+) = \varepsilon A \\ V(0^+) = 10V \leftarrow \end{cases}$$



$$\rightarrow V(\infty) = V_{ss} = 0 \quad t > 0$$

$$\tau_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \times 0.001} = 100 \text{ ms}$$

$$\alpha = 91.25 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \times 0.001}} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s}$$

مدارهای مرتبه دوم

نوع پاسخ حالت گذرا ← میرای شدید:

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4,50 \pm \sqrt{4,50^2 - 2,0^2} = -0,52, -11,98$$

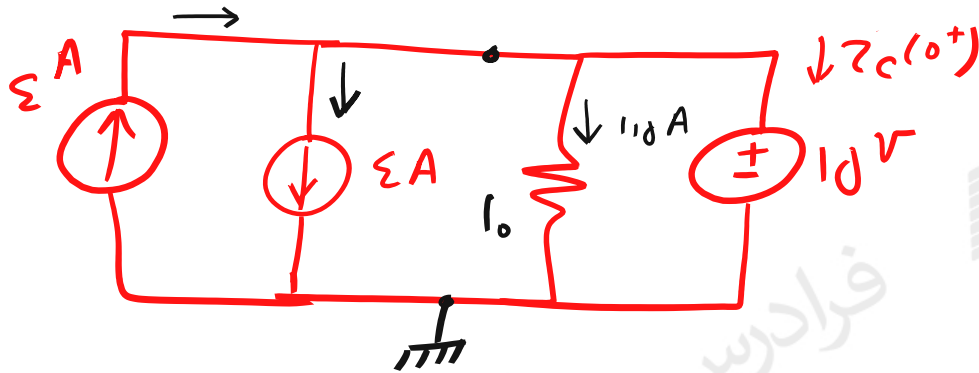
$$v(t) = A e^{-0,52t} + B e^{-11,98t} + v(\infty)$$

$$= (A e^{-0,52t} + B e^{-11,98t}) u(t) \quad t \geq 0$$

$$v(0^+) = A e^0 + B e^0 = A + B = 10$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = \frac{i_c(0^+)}{C} = (-0,52A - 11,98B = -187,5)$$

مدارهای مرتبه دوم

* مدار معادل در $t = 0^+$

$$\text{KCL: } \Sigma - \Sigma - i_0 - i_c(0^+) = 0$$

$$i_c(0^+) = -110 \text{ A}$$

$$\frac{d}{dt} V(0^+) = \frac{-110}{0.001} = -110,000 \text{ V/s}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\begin{cases} A + B = 15 \\ 0.02A + 11.91B = 187.5 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 11.91 \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 187.5 \end{bmatrix}}_U \rightarrow R \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = R^{-1} U$$

$$U(t) = (-0.41 e^{-0.02t} + 18.41 e^{-11.91t}) u(t) \quad t \geq 0$$

مدارهای مرتبه دوم

مدارات مرتبه دوم کلی

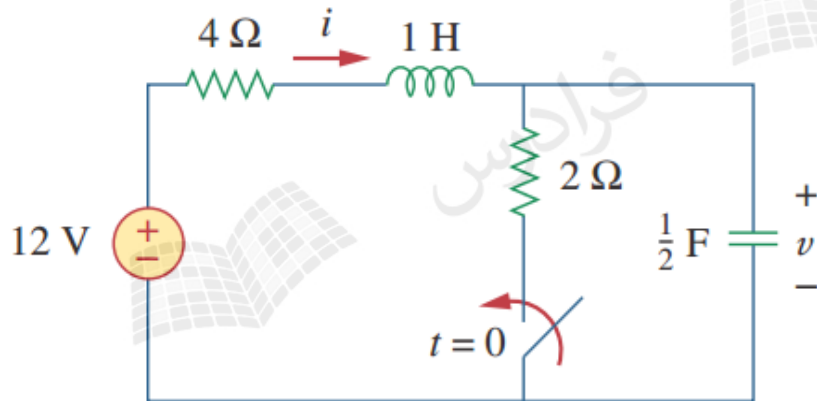
$$(v(0^+), \frac{d}{dt} v(0^+)) \quad (v_R(0^+), \frac{d}{dt} v_R(0^+))$$

- ۱. ابتدا شرایط اولیه برای حل معادلات دیفرانسیل مجهول را بدست آورید.
- ۲. منابع مستقل را صفر کرده و شکل پاسخ حالت گذرا را تعیین کنید.
- ۳. پاسخ حالت دائمی را تعیین کنید. ← از روی تحلیل DC ($t > 0$)
- ۴. مجهولات معادله را از روی گام اول محاسبه کنید.

$$x(t) = x_{tr} + x_{ss}$$

مدارهای مرتبه دوم

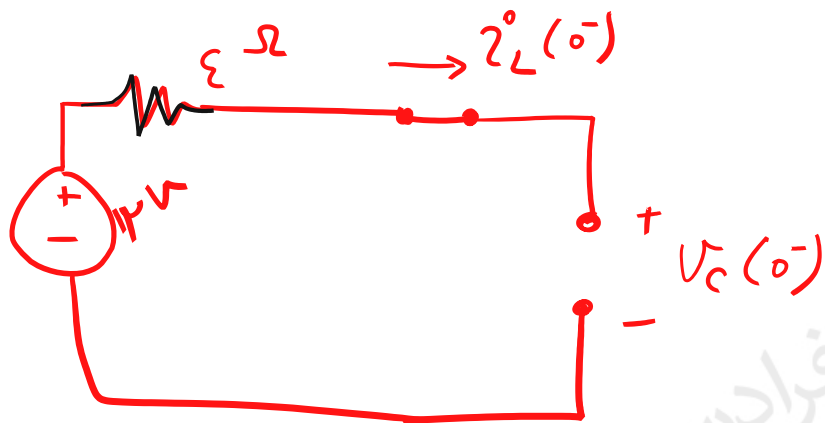
مثال - کلید مدار زیر برای مدت زمان خیلی طولانی باز بوده است و در زمان صفر بسته می شود. ولتاژ خازن را برای زمان های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



$$v(0^+), \frac{dv}{dt}(0^+)$$

$$\begin{cases} v(0^+) = 12 \text{ V} \leftarrow \\ \frac{dv}{dt}(0^+) = -12 \frac{\text{V}}{\text{s}} \leftarrow \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم



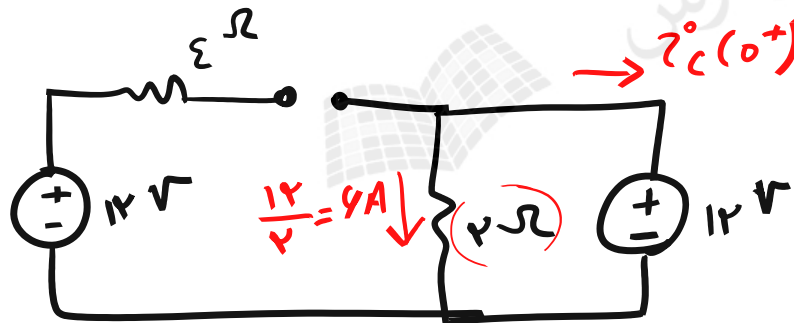
$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \text{ A} \\ V_C(0^-) = 12 \text{ V} \end{cases} \quad (t < 0)$$

$$\begin{cases} i(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A} \\ V(0^+) = V_C(0^-) = 12 \text{ V} \end{cases}$$

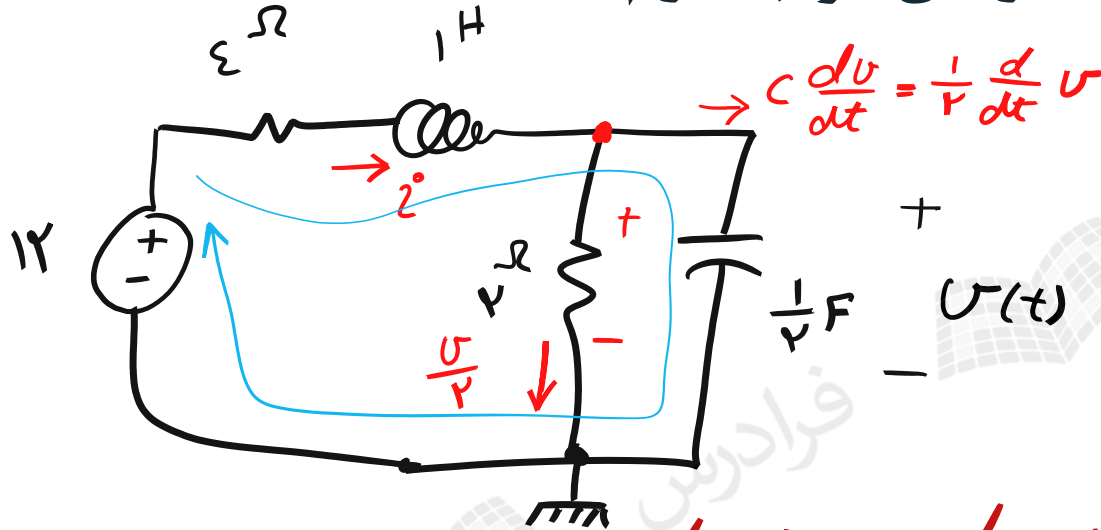
* مدار معادل در $t = 0^+$

$$i_C(0^+) = -4 \text{ A}$$

$$\frac{dV(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-4}{(\frac{1}{4})} = -12 \text{ V/s}$$



مدارهای مرتبه دوم

 $t > 0$

$$KCL: (z = \frac{U}{2} + \frac{1}{2} \frac{dU}{dt})$$

$$KVL: 12 = \varepsilon z + \frac{dz}{dt} + U$$

$$12 = \varepsilon \left(\frac{U}{2} + \frac{1}{2} \frac{dU}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{2} + \frac{1}{2} \frac{dU}{dt} \right) + U$$

$$12 = \frac{\varepsilon}{2} U + \frac{\varepsilon}{2} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dt^2} + U$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\varepsilon + 1}{2} \frac{dU}{dt} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 \right) U = 12 \right] \times 2$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} v + \omega \frac{d}{dt} v + \gamma v = \gamma \varepsilon \right\}$$

$\swarrow \gamma \alpha$
 $\swarrow \omega_0^2$

$$\gamma \alpha = \omega \Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{\gamma} = 210$$

$$\omega_0^2 = 6 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{6} \rightarrow \alpha > \omega_0$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\omega} = 0.4199 < \frac{1}{2}$$

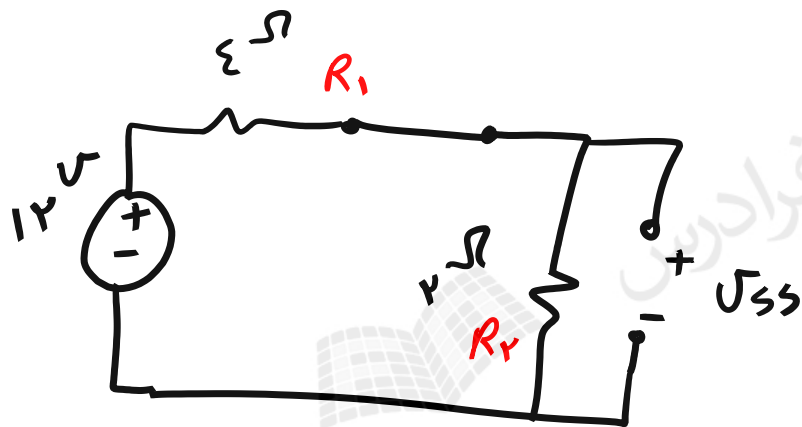
سیرای نوسان

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -210 \pm \sqrt{210^2 - 6} = -209 - 2$$

مدارهای مرتبه دوم

$$U_{tr}(t) = A e^{-\gamma t} + B e^{-\lambda t}$$

شکل پاسخ ندر



* تعیین مقدار پای (Uss)

$$U_{ss} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times 12V$$

$$= \frac{2}{2 + 4} \times 12 = 4V \leftarrow$$

روش ۲)

$$U_{ss} = X = 4V$$

$$4X = 24 \Rightarrow X = 6$$

مدارهای مرتبه دوم

$$v(t) = (A e^{-2t} + B e^{-3t} + \varepsilon) u(t)$$

$$v(0^+) = A + B + \varepsilon = 12 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 3B = 12 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} v(0^+) = -2A - 3B = -12 \Rightarrow$$

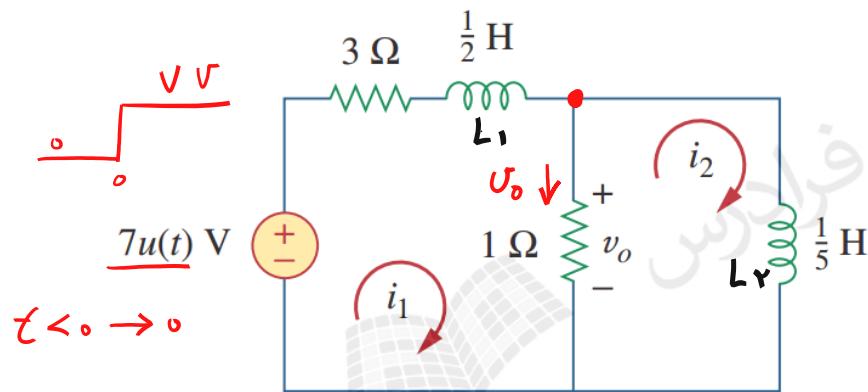
$$B = 12 - 2 \times 1 = -10, \quad A = 1 - B = +11$$

$$v(t) = (11 e^{-2t} - 10 e^{-3t} + \varepsilon) u(t)$$

و س، خان

مدارهای مرتبه دوم

مثال - ولتاژ خروجی V_o را برای زمان‌های بزرگتر از صفر محاسبه کنید.



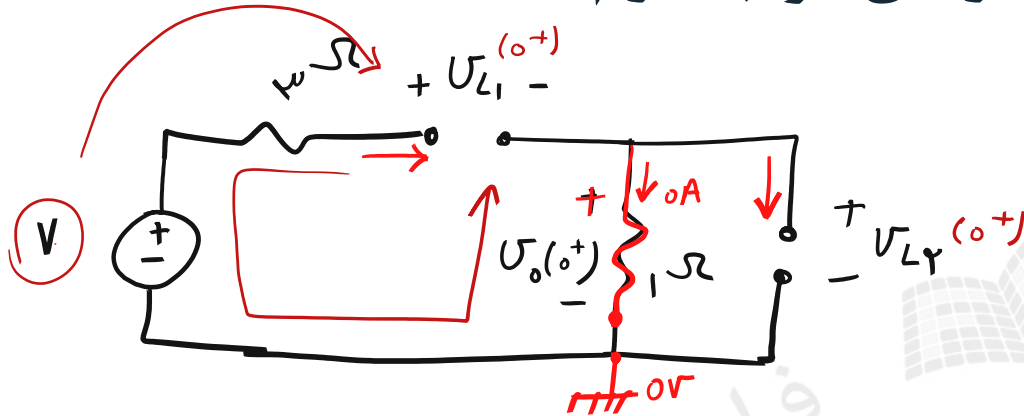
$$\begin{cases} z_1(0^-) = 0\text{ A} \\ z_2(0^-) = 0\text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_o(0^+) = 0\text{ V} \\ \frac{d}{dt} V_o(0^+) = 1\text{ V/s} \end{cases}$$

$$z_1 = V_o + z_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} z_1 = \frac{d}{dt} V_o + \frac{d}{dt} z_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V_o(0^+) = \frac{d}{dt} z_1(0^+) - \frac{d}{dt} z_2(0^+) = \frac{V_{L_1}(0^+)}{L_1} - \frac{V_{L_2}(0^+)}{L_2}$$

مدارهای مرتبه دوم

* مدار معادل در $t = 0^+$

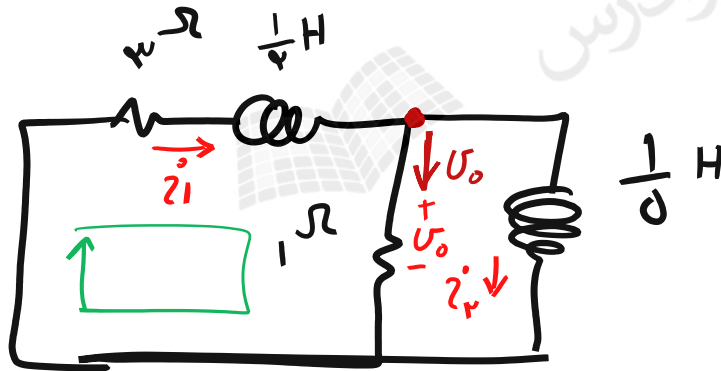
$$\begin{cases} V_o(0^+) = 0 \text{ V} \\ V_{L2}(0^+) = 0 \text{ V} \\ V_{L1}(0^+) = V \text{ volt} \end{cases}$$

* تقسیم شکل پاسخ حالت ندر

$$V_o = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} z_r^\circ$$

$$\rightarrow z_1^\circ = V_o + z_r^\circ = \left(\frac{1}{s} \frac{d}{dt} z_r^\circ + z_r^\circ \right)$$

$$\rightarrow 3z_1^\circ + \frac{1}{s} \frac{d}{dt} z_1^\circ + \frac{1}{s} \frac{d}{dt} z_r^\circ = 0$$



مدارهای مرتبه دوم

$$\nu \left(z_r^\circ + \frac{1}{\delta} \frac{d}{dt} z_r^\circ \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(z_r + \frac{1}{\delta} \frac{dz_r}{dt} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{d}{dt} z_r = 0$$

$$\left(\nu z_r^\circ + \left(\frac{\nu}{\delta} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\delta} \right) \frac{d}{dt} z_r^\circ + \frac{1}{\delta} \frac{d^2}{dt^2} z_r^\circ = 0 \right) \times 10$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z_r^\circ + (\nu + \delta + r) \frac{d}{dt} z_r^\circ + \nu_0 z_r^\circ = 0$$

$$\frac{1}{\delta} \frac{d^2}{dt^2} z_r^\circ + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dt} z_r^\circ + \nu_0 z_r^\circ = 0$$

$$\begin{cases} r\alpha = \nu \rightarrow \alpha = \frac{\nu}{r} \omega \\ \omega_0^r = \nu_0 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\nu_0} \end{cases} \quad \alpha > \omega_0 \rightarrow \text{میرای نوسان}$$

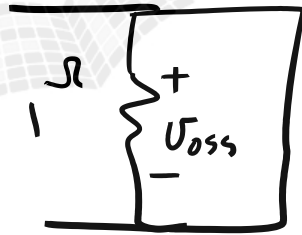
مدارهای مرتبه دوم

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\gamma_1 d \pm \sqrt{\gamma_1 d^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda = -\gamma_1, -10$$

$$V_{out}(t) = (A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-10t})$$

نکته: پاسخ ندر



$$V_{OSS} = 0 \text{ V}$$

* مقدار نهایی V_{OSS}

$$V_o(t) = (A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-10t}) u(t)$$

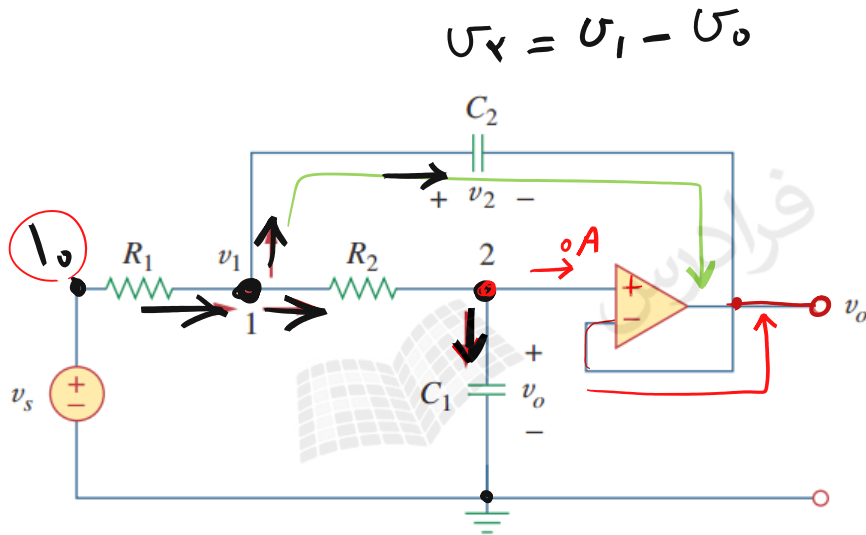
مدارهای مرتبه دوم

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 10B = 14 \end{cases} \rightarrow -7B = 14 \rightarrow \begin{cases} B = -2 \\ A = +2 \end{cases}$$

$$V_o(t) = (2e^{-3t} - 2e^{-10t})u(t)$$

مدارهای مرتبه دوم

مدارات مرتبه دوم شامل تقویت کننده‌های عملیاتی



$$v_2 = v_1 - v_o$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$C_2 = 5C_1 = 100 \mu\text{F}$$

$$v_s = 10 u(t)$$

$$C_2 = 100 \mu\text{F}$$

$$C_1 = 20 \mu\text{F}$$

$$v_s = 0 \quad t < 0$$

$$v_2(0^-) = 0, \quad v_o(0^-) = 0$$

$$v_o(0^+) = v_o(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$v_2(0^+) = 0$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\left(\frac{V_1 - V_o}{R_2} = C_1 \frac{dV_o}{dt} \right) \quad \frac{d}{dt} V_o(0^+) \quad *$$

$$\Rightarrow \frac{dV_o}{dt}(0^+) = \frac{V_1(0^+) - V_o(0^+)}{R_2 C_1}$$

$$V_1 = V_2 + V_o \Rightarrow V_1(0^+) = V_2(0^+) + V_o(0^+) = 0$$

$$\frac{d}{dt} V_o(0^+) = 0 \quad \checkmark_s$$

$$V_o(0^+) = 0 \quad \checkmark$$

مدارهای مرتبه دوم

$$* \quad V_1 = V_0 + R_2 C_1 \frac{dV_0}{dt}$$

$$\frac{V_0 - V_1}{R_1} = C_1 \frac{dV_0}{dt} + C_2 \frac{d}{dt} (V_1 - V_0)$$

$$V_0 - V_1 = \left(R_1 C_1 \frac{dV_0}{dt} + R_1 C_2 \frac{d}{dt} V_1 - R_1 C_2 \frac{d}{dt} V_0 \right)$$

$$V_0 = V_0 + R_2 C_1 \frac{dV_0}{dt} + R_1 C_1 \frac{dV_0}{dt} + R_1 C_2 \frac{d}{dt} (V_0 + R_2 C_1 \frac{dV_0}{dt}) - R_1 C_2 \frac{d}{dt} V_0$$

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 V_0}{dt^2} + (R_2 C_1 + R_1 C_1) \frac{dV_0}{dt} + V_0 = \underline{V_0}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\underbrace{10^4 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-6}}_{0.02} \frac{d^2 U_0}{dt^2} + (10^4 \times 20 \times 10^{-6} \times 2) \frac{dU_0}{dt} + U_0 = 10$$

$$0.02 \frac{d^2 U_0}{dt^2} + 0.4 \frac{dU_0}{dt} + U_0 = 10 \quad + U_0 = 10$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U_0}{dt^2} + 20 \frac{dU_0}{dt} + 50 U_0 = 500 \leftarrow \\ U_0(0^+) = 0 \text{ V} \quad \frac{d}{dt} U_0(0^+) = 0 \text{ V/s} \end{array} \right.$$

مدارهای مرتبه دوم

$$V_{oss} = V \Rightarrow 0 + 0 + 1V = 10$$

$$V = \frac{10}{\omega} = 10V \Rightarrow V_{oss} = 10V$$

$$\Delta = 1^2 + 2\lambda + \omega = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = -1 \pm 2j$$

نوع پاسخ میرای
نوسانی است.

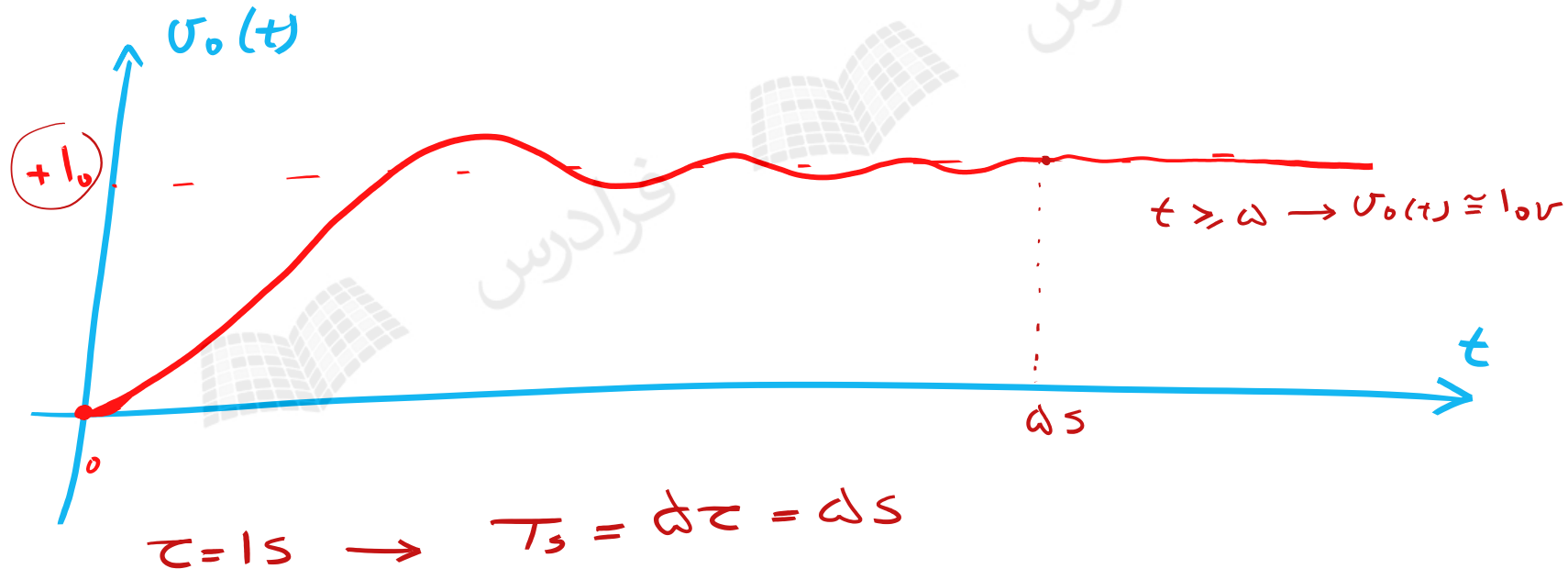
$$V_o = \left\{ e^{-t} (A \cos 2t + B \sin 2t) + 10 \right\}$$

$$V_o(0^+) = e^0 (A \cos 0 + B \sin 0) + 10 = 0 \Rightarrow A = -10$$

$$\frac{d}{dt} V_o(0^+) = 2B - A = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{2} = -5$$

مدارهای مرتبه دوم

$$V_o(t) = \left\{ 1 - e^{-t} (\cos 2t + \sin 2t) \right\} u(t) \quad t \geq 0$$



مدارهای مرتبه دوم

$$\rightarrow \begin{cases} \gamma \frac{dz_i}{dt} + \frac{dz_r}{dt} = U_s \\ \gamma^3 \frac{dz_i}{dt} + \gamma \frac{dz_r}{dt} = \omega_d U_s \end{cases}$$

$$D f(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

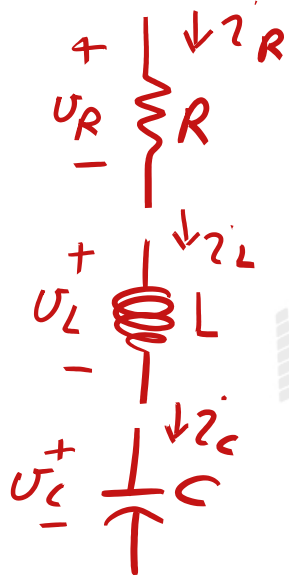
$$D^r f(t) = \frac{d^r}{dt^r} f(t) \quad * \text{ اپراتور } D$$

$$\begin{cases} \gamma D z_i + D z_r = U_s \rightarrow z_r = \frac{U_s - \gamma D z_i}{D} \\ \gamma^3 D z_i + \gamma D z_r = \omega_d U_s \Rightarrow \gamma^3 D z_i + \cancel{\gamma D} \times \frac{U_s - \gamma D z_i}{\cancel{D}} = \frac{U_s}{\gamma} \end{cases}$$

$$\gamma^3 D z_i + \gamma U_s - \varepsilon D z_i = \frac{U_s}{\gamma} \Rightarrow \left\{ + D z_i = + \frac{\gamma}{\gamma} U_s \right\}$$

مدارهای مرتبه دوم

$$\frac{d}{dt} i_1^o = \frac{v}{L} U_s \rightarrow i_1^o = \frac{v}{L} \int_0^t U_s dt$$

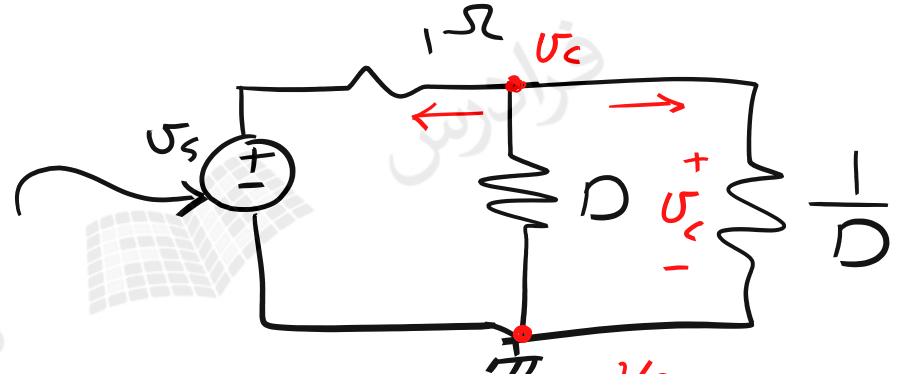
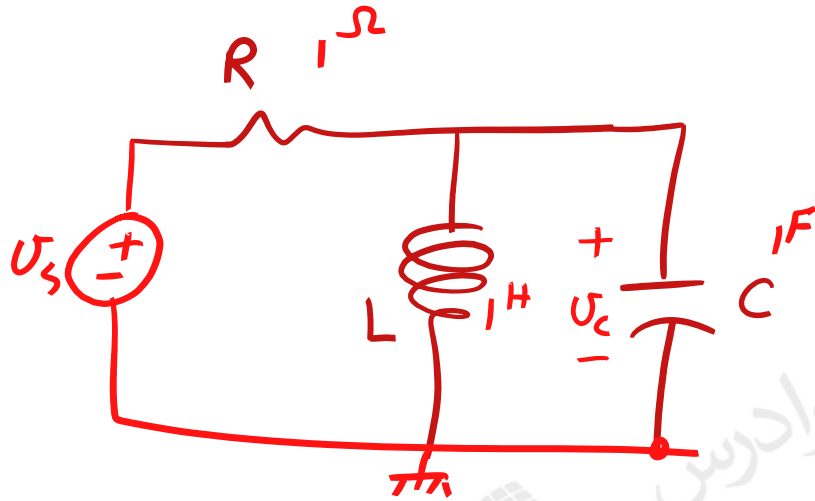


$$U_R = R i_R \rightarrow \frac{U_R}{i_R} = R$$

$$U_L = L \frac{d}{dt} i_L^o = L D i_L^o \Rightarrow \frac{U_L}{i_L^o} = L D$$

$$i_C = C \frac{d}{dt} U_C = C D U_C \Rightarrow \frac{U_C}{i_C} = \frac{1}{C D}$$

مدارهای مرتبه دوم



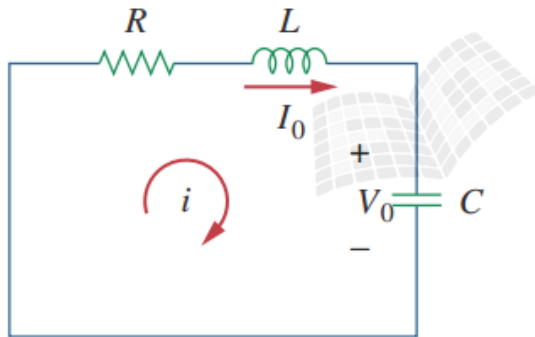
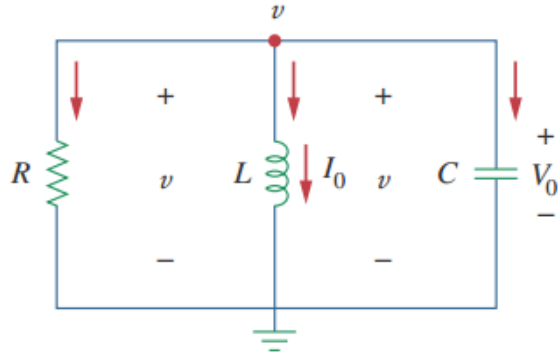
$$\frac{U_c - U_s}{1} + \frac{U_c}{D} + \frac{U_c}{\frac{1}{D}} = 0$$

$$U_c + \frac{U_c}{D} + D U_c = U_s$$

$$D^2 U_c + D U_c + U_c = D U_s$$

$$\frac{d^2}{dt^2} U_c + \frac{d}{dt} U_c + U_c = \frac{d}{dt} U_s$$

مدارهای مرتبه دوم



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

دوگان مدار

$$\begin{cases} V \rightarrow i \\ R \rightarrow \frac{1}{R} = G \\ L \rightarrow C \\ C \rightarrow L \end{cases}$$

مدارهای مرتبه دوم

Dual pairs.

Resistance $\underline{R}$ Inductance $\underline{L}$ Voltage $\underline{v}$ Voltage sourceNode

Series path

Open circuit

KVL

Thevenin

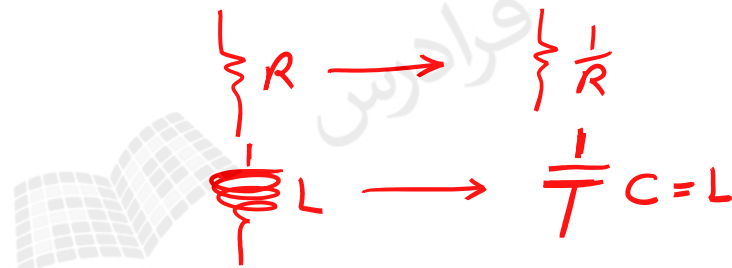
Conductance $\underline{G} = \frac{1}{R}$ Capacitance $\underline{C}$ Current $\underline{i}$ Current sourceMesh

Parallel path

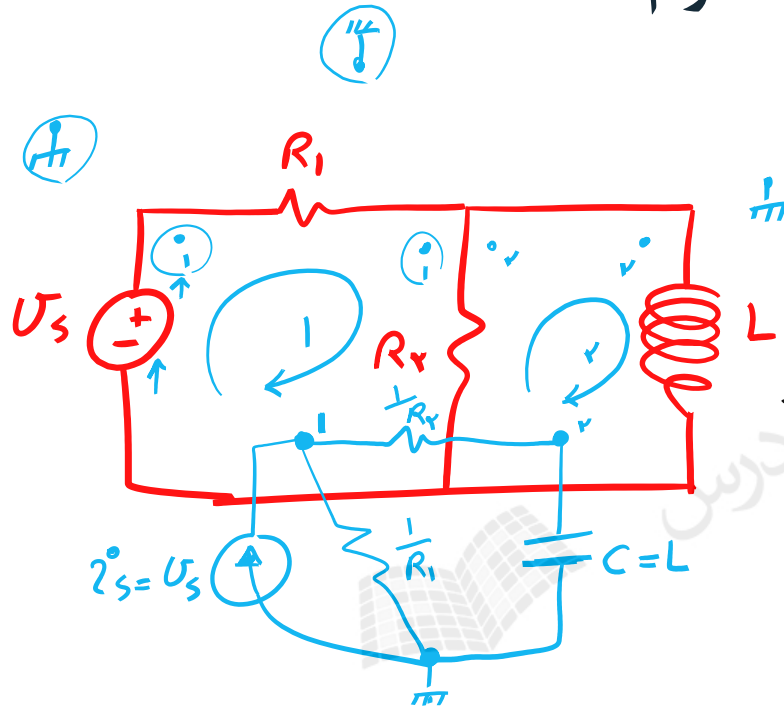
Short circuit

KCL

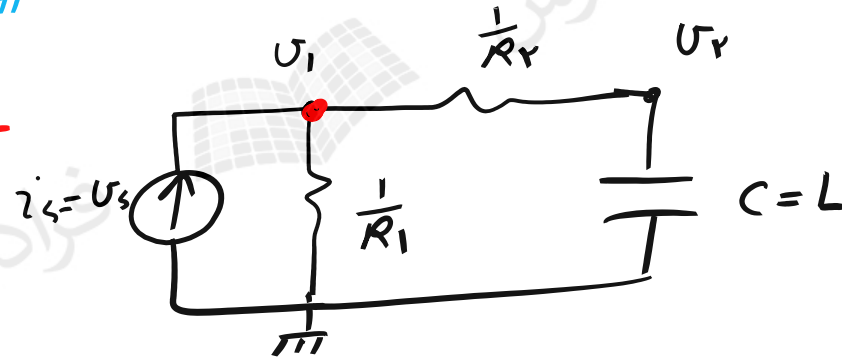
Norton



مدارهای مرتبه دوم

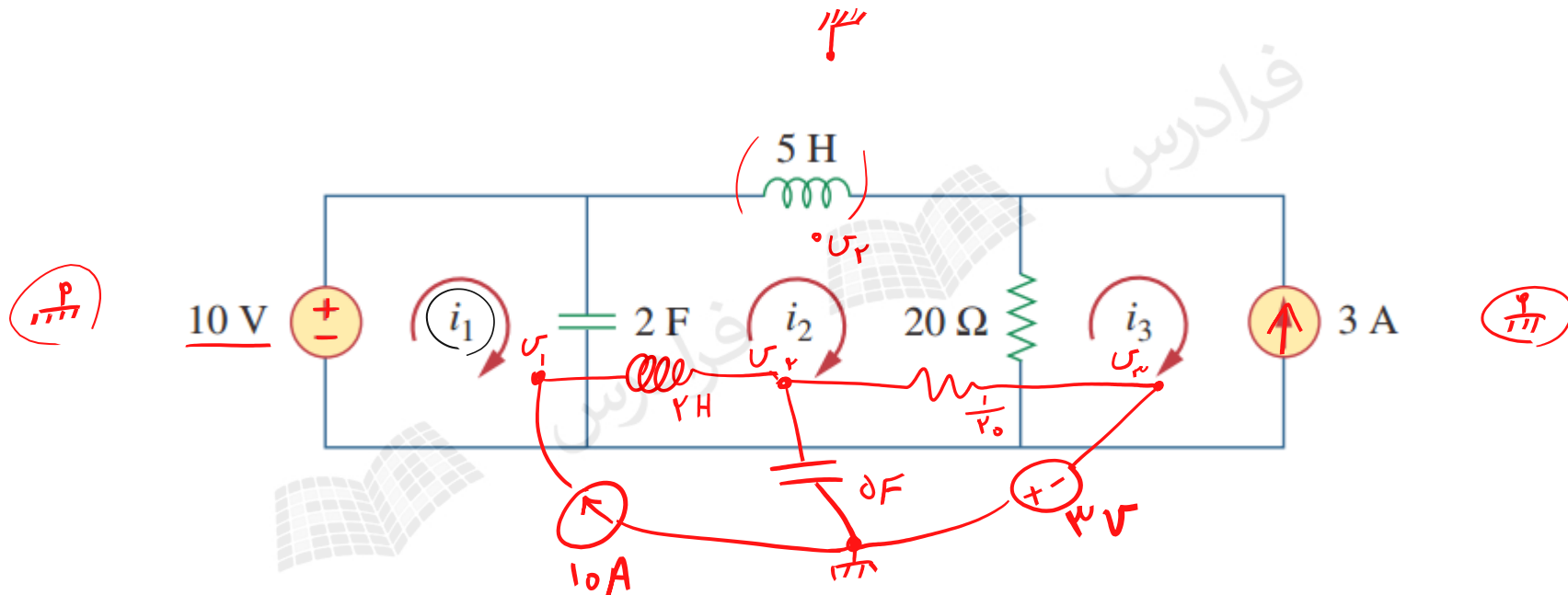


مدار دوپایه

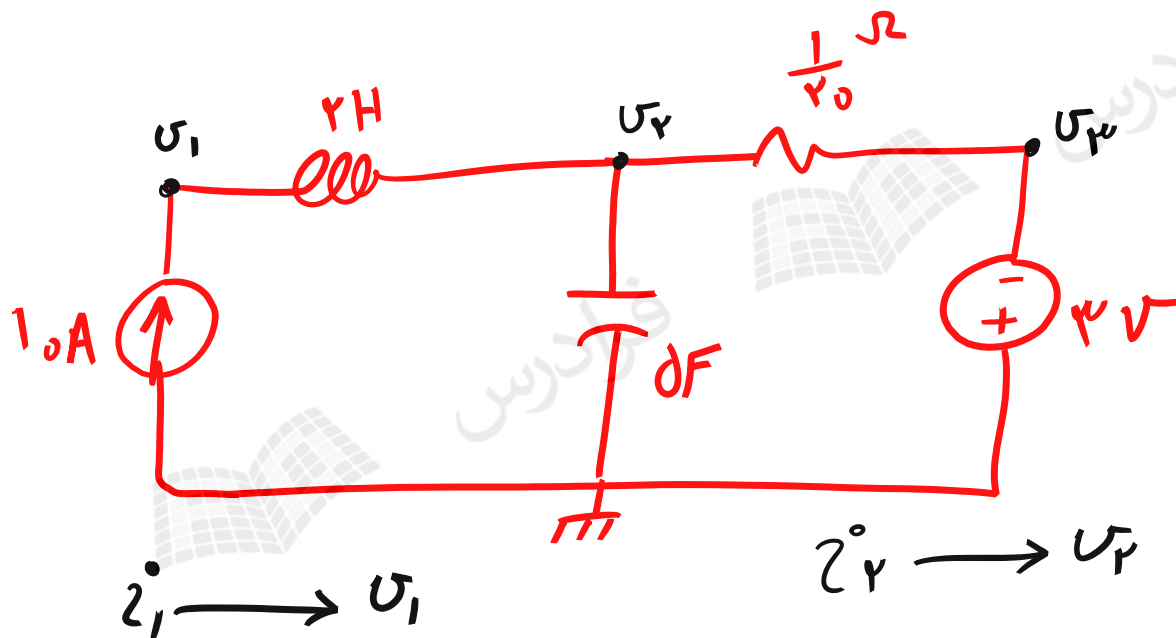


$$\alpha \frac{d}{dt} i_1 + \beta i_1 = U_s \longrightarrow \alpha \frac{d}{dt} U_1 + \beta U_1 = i_s$$

مدارهای مرتبه دوم



مدارهای مرتبه دوم



این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش مدارهای الکتریکی ۱»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvee110