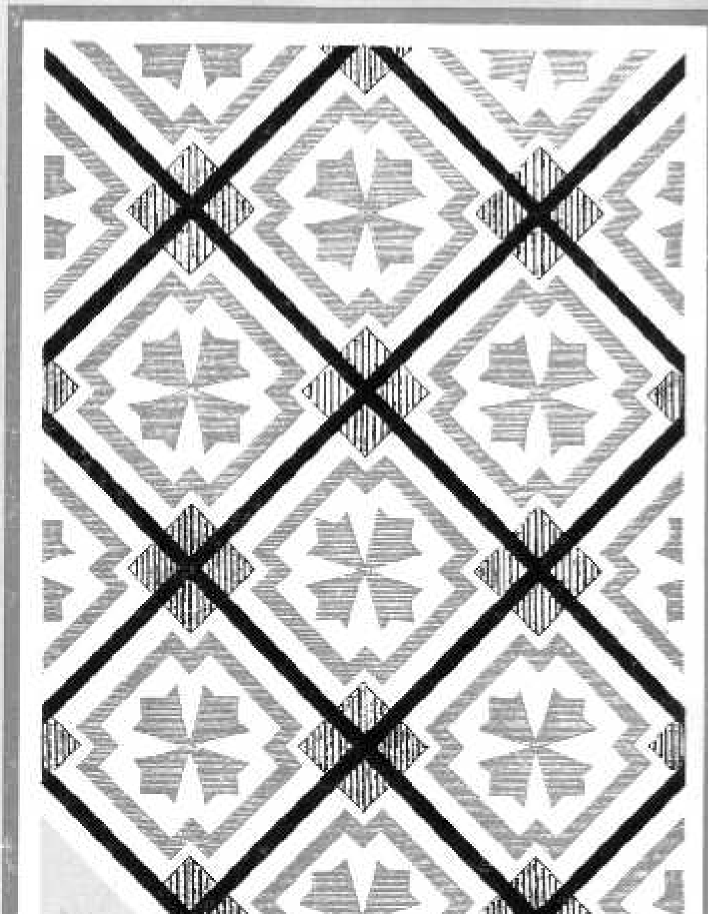
یاکوو ایسیدوروویچ پرلمان

ریاضیات زنده

برگردان: پرویز شهریاری



یاکوو ایسیدوروویچ پرلمان

ریاضیات زنده

سرگرمی، چیستان، معما

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر میترا
تهران - ۱۳۷۴

نشر میترا

ریاضیات زنده

یاکوو ایسیدوروویچ پرلمان

برگردان: پرویز شهریاری

چاپ نخست: بهار ۱۳۷۴ ـ چاپ: چاپخانهٔ رامین

شمار: ۳۳۰۰ نسخه

نشر میترا: خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲، تلفن: ۳۱۲۴۵۳۳

نویسندهٔ این کتاب «یاکوو ایسیدورورویچ پرلمان»، در سال ۱۸۸۲ میلادی، دریک خانوادهٔ فرهنگی به‌دنیا آمد. پدرش کتاب‌دار و مادرش آموزگار بود. بعد از پایان دبیرستان، به‌دانشکدهٔ مهندسی چوب در «پترزبورگ» وارد شد و رشتهٔ جنگل‌شناسی را انتخاب کرد. پرلمان، از همان دوران نوجوانی، به‌چیستان‌های علمی، به‌ویژه در زمینهٔ ریاضیات و فیزیک علاقه‌مند بود. نخستین کتابی که از او چاپ شد، «سرگرمی های فیزیک» در سال ۱۹۱۲ بود (درسال ۱۹۸۲، چاپ بیست و یکم آن، به‌سرعت فروش رفت). سپس، کتاب‌های سرگرمی‌های ریاضی (کتاب سرگرمی‌های جبر، سرگرمی‌های هندسه، سرگرمی‌های اخترشناسی و ...) را نوشت که همه با استقبال فراوان روبه‌رو شد. پرلمان، در سال‌های پیش از جنگ جهانی دوم، «انجمن سرگرمی‌های دانش» را، برای کودکان و نوجوانان (در لنین‌گراد) تشکیل داد که، فعالیت آن، هم زمان با آغاز جنگ آلمان هیتلری علیه اتحاد شوروی، تعطیل شد. و خود پرلمان، در مارس ۱۹۴۲، که لنین‌گراد محاصرهٔ جانکاه نهصد روزهٔ نازی‌ها را تحمل می‌کرد، مثل بسیاری ازدیگرهم‌شهری‌های خود، ازگرسنگی جان داد.

□

کتاب حاضر، که از چاپ یازدهم آن در سال ۱۹۷۸ (به‌زبان روسی و در تیراژ دویست هزار نسخه) ترجمه شده است، بین همهٔ کتاب‌هایی که دربارهٔ سرگرمی‌های ریاضی نوشته شده است، شهرت ویژه‌ای دارد. در این کتاب چیستان‌های زیادی آمده است که، بیشتر آن‌ها، رنگ داستان‌های کوتاه را دارند و، برای حل آن‌ها، کافی است با حساب مقدماتی و مفهوم‌های ساده هندسی آشنا باشیم.

در این کتاب می خوانید

۱

سر میز ناشتایی

۱. سنجاب

یکی ازکسانی که سر میز ناشتایی نشسته بود، گفت:

ـ امروز پیش از آفتاب، با سنجابی بازی «قایم‌باشک» داشتم. می‌دانید، در جنگل نزدیک ما، میدان کوچکی وجود دارد که درخت سپیدار بزرگی درمیان آن است. سنجاب روی تنهٔ درخت، پشت شاخهٔ بزرگی پنهان شده بود. همین که از بیشه به‌میدان آمدم؛ چشمم به‌پوزه سفید او، با چشم های زنده‌اش افتاد. که از پشت شاخهٔ درخت به‌من نگاه می‌کرد. با احتیاط و بدون این‌که به‌او نزدیک شوم، دور کنارهٔ میدان به‌راه افتادم تا خود را از دید جانور پنهان کنم. چهارمرتبه درخت را دور زدم، امّا جانور زرنگ رویرمی‌گرداند و خود را به‌طرف دیگر درخت می‌کشید، طوری که درهرحال تنها پوزهٔ او را می‌دیدم. به‌این ترتیب نتوانستم دور سنجاب بچرخم.

یکی ازکسانی که درآن جا بود گفت:

ـ ولی شما خودتان گفتید که چهارمرتبه دور درخت چرخیده‌اید.

ـ بله، دور درخت، اما نه دور سنجاب.

ـ ولی آخر سنجاب هم روی درخت بود.

ـ خوب باشد!

ـ یعنی شما سنجاب را هم دور زده‌اید.

ـ چه‌طور سنجاب را دور زده‌ام، درحالی که یک‌بار هم پشت او را ندیده‌ام.

ـ به‌پشت او چه بستگی دارد؟ سنجاب در مرکز دایره قرار گرفته و شما پیرامون دایره را پیموده‌اید، یعنی سنجاب را دور زده‌اید.

ـ چطور نمی‌فهمید؟ فرض کنید من بخواهم دور شما بچرخم، اما شما همیشه روی خودتان را به‌طرف من نگاه دارید. آیا می‌توانید ادعا کنید، من شما را دور زده‌ام؟

ـ البته که می‌توانم. مگر جز این است؟

ـ چه‌طور دور زده‌ام، درحالی که هرگز پشت شما نبوده‌ام و پشت سر شما را ندیده‌ام؟

ـ به‌پشت‌سر چه بستگی دارد؟ شما روی خم بسته‌ای دور من چرخیده‌اید و تنها همین لازم است، نه این که پشت سرم را ببینید.

ـ اجازه بفرمائید: چرخیدن دور یک چیز، یعنی چه؟ از دید من تنها به‌این معنا است: ایستادن پشت‌سر من در چنان‌نقطه‌هایی که بشود آن‌چیز را از همه طرف دید. و سپس، رو را به‌طرف پیرمردی که در جمع حاضر بود برگرداند و پرسید:

ـ مگر همین‌طور نیست استاد؟

استاد پاسخ داد:

ـ گفت و شنود شما بر سر مفهوم واژه‌ها است. درچنین موردهایی باید از این‌جا آغاز کرد که صحبت برسر چیست! باید از معنی واژه‌ها آغاز کرد. ببینیم «چرخیدن به‌دور یک چیز» به‌معنای چیست؟ این مفهوم را به‌دو راه می‌توان تعریف کرد. اول می‌توان با این مفهوم،

حرکت روی یک خم بسته را درنظر گرفت که چیز مورد نظر، در درون آن قرار گرفته باشد. این، یک معنا برای «چرخیدن به‌دور یک چیز» است. اما مفهوم دوم آن این است که نسبت به‌یک چیز، چنان حرکت کنیم که بتوانیم آن را از همه طرف ببینیم. با مفهوم اول، می‌توان گفت که شما سنجاب را چهارمرتبه دور زده‌اید. ولی اگر تعریف دوم را بپذیریم، باید نتیجه بگیریم که شما یک‌بار هم سنجاب را دور نزده‌اید. می‌بینید که، لازم نیست، اگر دو طرف حتا با یک زبان صحبت می‌کنند، مفهوم واژه‌ها برای هردونفر یکی باشد.

ـ خیلی خوب، می‌توان پذیرفت که برای چرخیدن دو مفهوم وجود دارد، ولی کدام درست‌تر است؟

شکل ۱. با زرنگی روی خود را به‌طرف دیگر می‌چرخاند.

ـ پرسش شما باید به‌نحو دیگری بیاید. می‌توان هرکدام را که بخواهید، انتخاب کرد. ولی می‌توان پرسید: کدام تعریف عمومی‌تر است و بیشتر مردم، آن را پذیرفته‌اند؟ از دیدگاه من، تعریف اول بهتر معنای واژه را بیان می‌کند، زیرا همان‌طور که می‌دانید، خورشید در هر ۲۶ شبانه‌روز یک دور کامل، دور محور خود می‌چرخد ...

ـ خورشید دور خودش می‌چرخد؟

ـ البته، همان‌طور که زمین دور خودش می‌چرخد. اکنون فرض کنید، اگر خورشید حرکت دورانی کندتری داشت و نه در ۲۶ شبانه‌روز، بلکه در $\frac{1}{4}$ ۳۶۵ شبانه‌روز، یعنی در یک سال، دور خودش می‌چرخید، دراین صورت همیشه یک سمت خورشید متوجه زمین بود، به‌زبان دیگر، «پشت» خورشید را هرگز نمی‌دیدیم. ولی آیا از این مطلب کسی این نتیجه را می‌گرفت که زمین دور خورشید نمی‌چرخد؟

ـ خوب، اکنون روشن شد که من هم دور سنجاب چرخیده‌ام. یکی از حاضران پیشنهاد کرد:

ـ بهتر است از هم جدا نشویم، تا هنگامی که باران بند نیامده کسی نمی‌تواند بیرون برود و آن‌طور که معلوم است باران هم به‌این زودی‌ها بند نمی‌آید. بنابراین به‌اندازهٔ کافی وقت داریم که سرگرمی‌هایی طرح کنیم. نخستین سرگرمی طرح شد؛ اجازه بدهید هریک از ما یک چیستان که شنیده یا اندیشیده‌ایم، مطرح کنیم و شما هم استاد، داور بزرگ ما خواهید بود.

زن جوانی گفت:

ـ اگر این چیستان‌ها به‌جبر یا هندسه بستگی داشته باشند، من را

معاف کنید.

یک مرد جوان هم گفت:

ـ من هم همین‌طور.

ـ نه، نه، همه باید شرکت کنند! از همه خواهش می‌کنیم، مسأله‌هایی دربارهٔ جبر یا هندسه نیاورند، مگر آن‌چه به مقدمات کار بستگی داشته باشد. خوب، اعتراضی نیست؟

ـ دراین صورت، من آماده‌ام نخستین چیستان را بیاورم.

از همه‌طرف بانگ برآمد که:

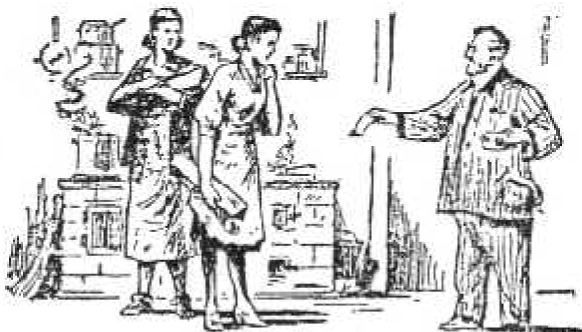
ـ آماده‌ایم، آغاز کنید.

۲. در آشپزخانه

چیستان من مربوط به‌زندگی دریک ساختمان است و، بنابراین، مسألهٔ زنده و جالبی است.

یکی از ساکنان (که ما برای آسانی کار، او را «خانم سه شعله» می‌نامیم) دراجاق مشترک، سه تکه چوب می‌گذارد. همسایهٔ او (که او را خانم «پنج شعله» می‌نامیم) پنج تکه چوب به‌اجاق اضافه می‌کند. ولی همسایهٔ سوم (آقای «بی‌شعله») همان‌طور که از نامش پیداست، چوبی دراجاق نمی‌گذارد و از همسایه‌های خود اجازه می‌خواهد که نهار خود را روی آتشی که آن‌ها تهیه کرده‌اند، درست کند.

او به‌خاطر استفاده از اجاق، ۸ تومان به‌همسایه‌های خود پرداخت. اکنون می‌خواهیم ببینیم این پول به‌چه ترتیب باید بین دو همسایه تقسیم شود.



شکل ۲. در برابر استفاده از اجاق، هشت تومان به‌همسایه‌های خود پرداخت.

یکی از حاضران گفت: به‌طور برابر، برای این که از آتش دو همسایه به‌طور برابر استفاده کرده است.

دیگری گفت:

ـ نه، نه، باید به‌نسبت هیزمی که در اجاق گذاشته‌اند، تقسیم شود. آن که سه تکه چوب گذاشته، ۳ تومان؛ و آن که پنج تکه چوب گذاشته، ۵ تومان باید بگیرد. دراین صورت، تقسیم عادلانه خواهد بود.

کسی که چیستان را طرح کرده بود و اکنون دیگر رییس جلسه به‌شمار می‌آمد، رشته سخن را به‌دست گرفت:

ـ راه‌حل درست چیستان، بعد اعلام خواهد شد. بگذارید همه روی آن فکر کنند. پاسخ‌های درست را هنگام شام خواهیم دید.

اکنون نفر بعد. نوبت شماست، دوست پیش‌آهنگ!

۳. کار انجمن‌های مدرسه

در مدرسه ما، پنج انجمن وجود دارد. انجمن‌های سیاسی، علمی، عکاسی، شطرنج و موسیقی.

انجمن سیاسی یک روز درمیان تشکیل می‌شود، انجمن علمی دو روز درمیان (سه روز یک‌بار)، انجمن عکاسی هرچهارروز یک‌بار، انجمن شطرنج هرپنج روز یک بار و انجمن موسیقی هر شش روز یک‌بار. روز اول ژانویه، هرپنج انجمن تشکیل شد و از آن به‌بعد، بنابر برنامه‌ایی که داشتند، به‌طور مرتب و بدون تعطیل، جلسه‌های خود را تشکیل دادند. اکنون می‌پرسم، در نخستین فصل سال چند روز وجود دارد که هرپنج انجمن با هم تشکیل جلسه داده باشند.

چند نفر پرسیدند:

ـ آیا سال ساده بود یا کبیسه؟

ـ ساده.

ـ یعنی نخستین فصل سال: ژانویه، فوریه و مارس را باید نودروز به‌شمار آورد؟

ـ البته.

استاد گفت:

ـ اجازه بدهید، به‌پرسش شما، پرسش دیگری هم بیفزایم. درهمین فصل سال چند روز وجود دارد که هیچ کدام از انجمن‌ها، در مدرسه، تشکیل جلسه نداده‌اند؟

یکی گفت:

ـ آهان، فهمیدم! مسأله ساده است. هیچ روزی هرپنج انجمن با هم تشکیل نخواهند شد و هیچ روزی هم، مدرسه بدون انجمن نخواهد

بود. این روشن است.

ـ ازکجا چنین چیزی روشن است؟

ـ دلیلی نمی‌توانم بیاورم، ولی احساس می‌کنم، آن‌چه گفتم درست است.

ـ ولی این کافی نیست. سرشام معلوم خواهد شد، آیا احساس شما درست است یا نه؟

ـ اکنون نوبت شماست دوست عزیز!

۴. چه کسی بیشتر؟

دو نفر درطول یک ساعت، تمام کسانی را که درپیاده‌رو، از کنارشان عبور می‌کنند، می‌شمارند. یکی از این دو نفر جلو منزل خود ایستاده، و دیگری در پیاده‌رو بالا و پایین می‌رود. چه کسی بیشتر می‌شمارد، آن‌که ایستاده یا آن‌که در رفت و آمد است؟

از آن طرف میز یکی گفت: «روشن است! آن که راه می‌رود». استاد گفت: برای پاسخ منتظر شام باشیم. ادامه بدهید.

۵. پدربزرگ و نوه

آن‌چه می‌خواهم حکایت کنم درسال ۱۹۳۲ پیش آمده است. درآن سال، سن من برابر با دو رقم سمت راست سال تولدم بود. ولی وقتی این مطلب را برای پدربزرگم گفتم، او درمیان شگفتی بی‌اندازهٔ من گفت:

ـ سن من هم برابر است با دو رقم سمت راست سال تولدم. گمان می‌کردم، این ناممکن است.

یکی پرسید:

ـ مگر اکنون ناممکن نیست؟

ـ این‌طور فرض کنید که ممکن است، و ببینید هرکدام از ما درسال ۱۹۳۲ چند سال داشته‌ایم!

۶. بلیت‌های راه‌آهن

یکی از خانم‌های حاضر در جلسه چنین آغاز کرد.

ـ من دریکی از باجه‌های فروش بلیت راه‌آهن کار می‌کنم. به‌نظر بسیاری از مردم، فروش بلیت کار بسیار ساده‌ای است و گمان نمی‌کنند حتا دریک ایستگاه کوچک، چه تعداد زیادی بلیت فروخته می‌شود.

شکل ۳. من بلیت راه‌آهن می‌فروشم

در واقع، باید آن‌قدر بلیت‌های گوناگون داشت تا مسافران بتوانند، از ایستگاهی که هستند، برای هرایستگاه دیگری درمسیر راه‌آهن (به‌هردو سمت) بلیت تهیه کنند. من در خطی از راه آهن کار می‌کنم که ۲۵ ایستگاه دارد. به‌نظر شما چندگونه بلیت راه‌آهن باید برای همه باجه‌ها تهیه شود؟

ـ حالا نوبت شماست دوست خلبان.

۷. پرواز هواپیما

هواپیمایی از لنین‌گراد به‌طور مستقیم به‌سمت شمال پرواز کرد، ۵۰۰کیلومتر به‌سمت شمال پیش رفت و به‌طرف شرق پیچید. دراین سمت هم ۵۰۰کیلومتر پرواز کرد، سپس به‌طرف جنوب پیچید و دراین جهت هم ۵۰۰کیلومتر پیش رفت. سپس، هواپیما به‌غرب پیچید و باز هم ۵۰۰کیلومتر پیش رفت. آن‌گاه به‌زمین نشست.

پرسش این است: این‌هواپیما نسبت به لنین‌گراد، کجا به‌زمین نشسته است: سمت مغرب، مشرق، شمال یا جنوب؟

یکی از حاضران گفت:

ـ مثل این که ما را ساده حساب می‌کنید! ۵۰۰گام به‌جلو بردار، بعد ۵۰۰گام به‌عقب، ۵۰۰گام به‌طرف چپ و ۵۰۰گام به‌طرف راست. به کجا می‌رسی؟ روشن است به‌همان‌جا که حرکت کرده بودی.

ـ به‌این ترتیب به‌نظر شما، هواپیما کجا به‌زمین نشسته است؟

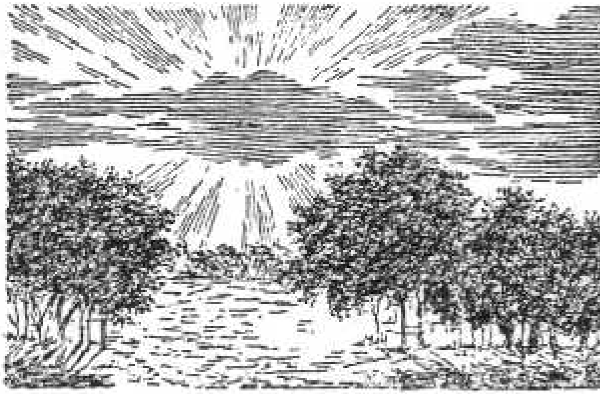
ـ درهمان فرودگاه لنین‌گراد، یعنی همان‌جا که پرواز را آغاز کرده بود. مگر این‌طور نیست؟

ـ بی‌تردید، این طور نیست!

ـ من که نمی‌فهمم!
نفر پهلویی گفت:
ـ درواقع، باید چیزی را نفهمیده باشیم. آیا به‌واقع هواپیما در لنین‌گراد به‌زمین ننشسته است؟: پس اگر ممکن است یک‌بار دیگر مسأله را شرح هید.
خلبان با کمال میل پذیرفت و همه با دقت گوش دادند. رییس جلسه گفت:
ـ خوب، می‌توانیم تا موقع شام دربارهٔ این مسأله بیندیشیم.
اکنون باید طرح پرسش‌ها را ادامه داد.

۸ سایه

کسی که برای طرح چیستان خودش را آماده کرده بود گفت:
ـ اجازه بدهید، من هم برای موضوع چیستان خود، همان هواپیما را انتخاب کنم. پرسش من این است: آیا هواپیما بزرگتر است یا سایهٔ کامل آن؟
ـ تمام چیستان شما همین است؟
ـ همین!
ـ البته سایهٔ هواپیما بزرگتر است. مگر نه این است که پرتوهای خورشید مثل پره‌های بادبزن به‌طور مخروطی از هم دور می‌شوند؟
یکی دیگر از حاضران گفت:
ـ من گمان می‌کنم درست برعکس است. پرتوهای خورشید موازی‌اند و بنابراین هواپیما و سایهٔ آن با هم برابر می‌شوند.
ـ چه می‌گویی؟ مگر برای شما پیش نیامده است، ببینید، وقتی



شکل ۴. وقتی خورشید پشت ابر پنهان است، پرتوهای آن از هم دور می‌شوند

خورشید پشت یک تکه ابر پنهان شده است، پرتوهای آن از سمت‌های مختلف ابر، از هم دور می‌شوند؟ سایهٔ هواپیما باید خیلی بزرگتر از خود هواپیما باشد. همان‌طور که سایهٔ ابر هم از خود ابر خیلی بزرگتر است.

ـ چرا همیشه این‌طور فرض می‌کنند که پرتوهای خورشید با هم موازی‌اند؟ ملاح‌ها و اخترشناسان هم این‌طور گمان می‌کنند ...

رییس جلسه اجازهٔ ادامه بحث را نداد و رشتهٔ سخن را به‌نفر بعدی سپرد.

۹. مسأله‌ای دربارهٔ چوب کبریت‌ها

کسی که نوبت طرح چیستان با او بود، یک قوطی کبریت برداشت، همهٔ کبریت‌های آن را روی میز خالی کرد و سپس آن‌ها را به‌سه دسته بخش کرد.

صدایی بلند شد:

ـ شما می‌خواهید آتش درست کنید؟

ـ نه، چیستان من مربوط به‌این کبریت‌ها است. تعداد کبریت‌ها دراین سه دسته، برابر نیست. روی هم ۴۸ عدد هستند و به‌شما نمی‌گویم، در هردسته چند کبریت وجود دارد! ولی به‌توضیح‌های زیر دقت کنید: اگر ازکبریت‌های دستهٔ اول به‌همان اندازه‌که در دستهٔ دوم وجود دارد بردارم و به‌دستهٔ دوم اضافه کنم و، سپس، از دستهٔ دوم به‌همان اندازه که در دستهٔ سوم وجود دارد، بردارم و به‌دستهٔ سوم اضافه‌کنم و، سرانجام از دستهٔ سوم به‌اندازهٔ آن‌چه در دستهٔ اول باقی مانده بردارم و به‌دستهٔ اول اضافه کنم، تعداد کبریت‌ها در هرسه دسته برابر می‌شود. اکنون بگویید درآغاز، در هردسته چند کبریت وجود داشته است؟

۱۰. درخت اسرارآمیز

این چیستان را مدت‌ها پیش یک دهقان علاقه‌مند به‌ریاضی برای من گفته است. این یک داستان کامل و با مزه است. دهقانی درجنگل به‌یک پیرمرد ناآشنا برخورد. با هم به‌گفت و شنود پرداختند. پیرمرد با دقت دهقان را برانداز کرد و گفت:

ـ در جنگل درختی را دیده‌ام که بی‌اندازه عجیب است. این درخت می‌تواند به‌آدم‌های فقیر یاری برساند.

ـ چه کمکی می‌کند؟ آیا بیماران را شفا می‌دهد؟

ـ نه، کاری به‌بیماران ندارد. بلکه پول هرکس را دوبرابر می‌کند. کیف پول خود را پهلوی آن می‌گذاری، بعد تا صد می‌شماری، آن وقت پولی که درکیف تو بود، دوبرابر می‌شود. ویژگی درخت، همین

است.

دهقان با اشتیاق پرسید:

-آیا من هم می‌توانم امتحان کنم؟

-البته که می‌توانی! تنها باید دستمزدی بپردازی.

-به‌چه کسی باید بپردازم؟ آیا این دستمزد زیاد است؟

-باید به کسی بپردازی که راه را به‌تو نشان می‌دهد، یعنی به‌من. اما درباره مبلغ آن، می‌توانیم با هم کنار بیاییم.

چانه‌زدن آغاز شد. وقتی پیرمرد متوجه شد، دهقان پول زیادی ندارد، موافقت کرد، پس از هربار که پول او دوبرابر می‌شود، ۱۲۰ تومان بپردازد.

پیرمرد دهقان را به‌ژرفای جنگل برد. مدتی این‌طرف و آن‌طرف رفتند و سرانجام، پهلوی کندهٔ بزرگی که باقی‌مانده یک درخت سرو کهن‌سال بود، ایستادند. پیرمرد کیف دهقان را ازدست او گرفت و آن را زیر خزه‌هایی که دور و بر کنده را پوشانده بود، پنهان کرد. تا صد شمرد، سپس دوباره به‌سوی کنده درخت رفت، دست خود را زیر

شکل ۵ پیرمرد، دهقان را به‌ژرفای جنگل برد

خزه کرد، مدتی معطل ماند و بعد کیف را بیرون آورد و به‌دست دهقان داد.

دهقان کیف را باز کرد و دید که در واقع پول‌ها دوبرابر شده است. ۱۲۰ تومان از پول‌ها را به‌پیرمرد داد و از او خواهش کرد بقیه را دوباره پهلوی کندهٔ پربرکت پنهان کند.

دوباره تا صد شمردند، باز هم پیرمرد، مدتی خود را در کنار کندهٔ درخت معطل کرد. سپس کیف را بیرون آورد. باز هم پول‌ها دو برابر شده بود. درنتیجه پیرمرد برای مرتبهٔ دوم، ۱۲۰ تومان از دهقان گرفت.

کیف را برای بار سوم پهلوی کنده درخت گذاشتند. پول‌ها این مرتبه هم دو برابر شد. ولی وقتی دهقان دستمزد قراردادی، یعنی ۱۲۰ تومان را به‌پیرمرد داد، چیزی در کیف، باقی نمانده بود. بیچاره دراین ماجرا، تمام پول خود را از دست داده بود. دیگر پولی نمانده بود که آن را دو برابر کنند و دهقان، اندوهگین و ناراحت جنگل را ترک گفت.

البته، راز دو برابرشدن پول‌ها برشما پوشیده نیست. وقتی پیرمرد کنار کندهٔ درخت معطل می شد، مسألهٔ دوبرابر شدن پول‌ها را حل می‌کرد. ولی آیا شما می‌توانید پاسخ پرسش دوم را بدهید:

- وقتی هنوز از کنده پربرکت درخت سرو کمک نگرفته بودند، دهقان چقدر پول داشت؟

۱۱. مسأله‌ای دربارهٔ دکابر[1]

کسی که نوبت او بود گفت:

ـ دوستان! من زبان‌شناس هستم و از ریاضیات دورم و، بنابراین، انتظار یک مسألهٔ ریاضی نداشته باشید. تنها می‌توانم، در زمینهٔ کار خودم، پرسشی طرح کنم. اگر اجازه می‌دهید، چیستانی از تقویم بیاورم؟

ـ بفرمایید.

ـ ماه دوازدهم را دکابر می‌نامیم. اصل این واژه از ریشهٔ یونانی آن «دکا» آمده است که به‌معنی «ده» می‌باشد. واژه‌های دکامتر و دکالیتر (به‌معنی ده‌متر و ده لیتر) و غیر آن، از همین معنا آمده‌اند. باید پاسخ بدهید، چرا اسم «دکابر» را به‌ماه دوازدهم داده‌اند؟ چه‌طور می‌توان این تناقض را حل کرد؟

رییس جلسه گفت:

ـ اکنون تنها یک نفر باقی مانده است که باید چیستان خود را طرح کند.

۱۲. رازی از حساب

خوب، مثل این‌که من آخرین نفری هستم که باید چیستان خود را بیاورم. بد نیست برای تنوع، رازی از عددها را طرح کنم و از شما بخواهم، آن را کشف کنید.

یکی از شماها (و مثلاً شما رییس جلسه) بدون این‌که من بدانم، یک عدد سه رقمی روی کاغذ بنویسید.

---

۱. منظور همان ماه دسامبر است که در زبان روسی، دکابر گفته می‌شود.

- جزو این رقم‌ها صفر هم می‌تواند باشد؟

- بله، هیچ شرطی نداریم، هرعدد سه رقمی که شما دلتان بخواهد.

- نوشتم! بعد چه؟

- پهلوی این عدد، همان سه رقم را دوباره بنویسید. اکنون یک عدد شش رقمی دارید.

- درست است، یک عدد شش رقمی.

- کاغذ را به‌نفر پهلوی خود، که دورتر از من نشسته است، رد کنید و از او خواهش کنید، این عدد را به ۷ بخش کند.

- گفتنش ساده است! چه‌طور به ۷ بخش کند، شاید این عدد بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

- نگران نباشید. بدون این‌که باقی‌مانده‌ای داشته باشد، بخش‌پذیر است.

- شما از عدد آگاهی ندارید، با وجود این دلتان جمع است که بر ۷ بخش‌پذیر است؟

- اول بخش کنید، بعد دراین زمینه حرف خواهیم زد.

- شانس آوردید. بر ۷ بخش‌پذیر بود.

- نتیجه تقسیم، یعنی خارج‌قسمت آن را، بدون آگاهی من، به‌نفر کناری خود بدهید و از او خواهش کنید، آن را به ۱۱ تقسیم کند.

- گمان می‌کنید، باز هم شانس به‌شما یاری کند و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد؟

- بخش کنید. تردید ندارم باقی‌مانده نخواهد داشت.

- شگفتا! در واقع هم باقی‌مانده نیاورد. خوب، اکنون چه؟

- خارج قسمت تقسیم را به‌نفر بعدی بدهید و اکنون، آن را ... مثلاً بر ۱۳ بخش کنید.

- عدد خوبی انتخاب نکردید. عددهای کمی هستند که بر ۱۳ بخش‌پذیرند ... عجب؟ نه، ممکن نیست! بخش شد. چه شانس بزرگی دارید؟

- اکنون نتیجه را روی کاغذ بنویسید و به‌من بدهید، آن را تا کنید تا من عدد را نبینم.

طرح‌کننده چیستان، بدون آن‌که کاغذ را باز کند، آن را به‌رییس جلسه داد:

- بفرمایید! این همان عددی است که شما از آغاز درنظر گرفته بودید، درست است؟

- کاملاً درست است. درواقع هم‌همین عدد را درنظر گرفته بودم.

طرح چیستان‌ها تمام شد، خوشبختانه باران هم بند آمده بود. رییس جلسه خواهش کرد هرکس پرسشی طرح کرده، پاسخ آن را روی کاغذی بنویسد و به‌او بدهد تا سر شام به‌آگاهی همه رسانده شود.

حل چیستان‌های ۱ تا ۱۲

۱. حل چیستان مربوط به‌سنجاب را، به‌طور کامل در متن دیدید. اکنون به‌حل سایر چیستان‌ها می‌پردازیم.

۲. حل این مسأله، آن‌طور که در آغاز به‌نظر می‌رسد، درست نیست. نباید گمان کرد که ۸ تومان برای هشت تکه چوب پرداخت شده است و بنابراین برای هرتکه چوب یک تومان درنظر گرفته شود. چون هرسه نفر به‌طور برابر، از آتش استفاده کرده‌اند و یکی از آن‌ها، بخاطر این استفاده ۸ تومان پرداخته است، بنابراین ارزش تمام آتش برابر ۳ × ۸، یعنی ۲۴ تومان می‌شود و چون آتش را با هشت تکه چوب درست کرده بودند، برای هرتکه چوب باید، ۳ تومان درنظر گرفت. اکنون به‌سادگی می‌توان حساب کرد که به‌هریک از دو نفر چند تومان می‌رسد. خانم «پنج شعله» پنج تکه چوب، یعنی ۱۵ تومان داده است و چون به‌اندازهٔ ۸ تومان از آتش استفاده کرده است، باید بقیه آن یعنی ۷ = ۸ - ۱۵ تومان را پس بگیرد. خانم «سه‌شعله» که سه تکه به‌ارزش ۹ تومان داده است، باید به‌اندازه ۱ = ۸ - ۹ تومان بگیرد. به‌این ترتیب، از ۸ تومان همسایه سوم، ۷ تومان به‌خانم «پنج شعله» و ۱ تومان به‌خانم «سه شعله» می‌رسد.

۳. به‌پرسش اول که بعد از چند روز دوباره همهٔ انجمن‌های پنج‌گانه با هم در مدرسه تشکیل جلسه می‌دهند، به‌سادگی می‌توان پاسخ داد. درواقع باید کوچک‌ترین عددی را پیدا کرد که به‌عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، بخش‌پذیر باشد.

این عدد (که کوچک‌ترین مضرب مشترک عددهای بالا نامیده می‌شود)، برابر است با ۶۰. یعنی در شصت و یکمین روز دوباره هرپنج انجمن با هم جلسه خواهند داشت.

این انجمن سی‌امین جلسهٔ انجمن سیاسی، بیستمین جلسهٔ انجمن علمی، پانزدهمین جلسهٔ انجمن عکاسی، دوازدهمین جلسهٔ انجمن

شطرنج و دهمین جلسهٔ انجمن موسیقی خواهد بود. پیش از این روز، هرگز هرپنج انجمن با هم در مدرسه جمع نشده‌اند. جلسه مشابه بعدی، باز هم بعد از ۶۰ روز خواهد بود، یعنی در فصل بعد.

به‌این ترتیب، درفصل اول سال، تنها یک‌روز دیگر وجود دارد که هرپنج انجمن برای کار خود در مدرسه انجمن خواهند داشت.

پاسخ پرسش دوم اندکی دشوارتر است: چند روز وجود دارد که هیچ کدام از انجمن‌ها جلسه نداشته‌اند؟ برای این که‌تعداد این‌روزها را به‌دست بیاوریم، باید عددهای از ۱ تا ۹۰ را به‌ترتیب و پشت سرهم نوشت و، دربین آن‌ها روزهایی را که انجمن سیاسی جلسه دارد، یعنی روزهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و غیره را خط زد. سپس، روزهایی را که انجمن علمی جلسه دارد، یعنی روزهای ۴، ۷، ۱۰ و غیره را خط زد. و به‌همین ترتیب روزهایی را که انجمن عکاسی، انجمن شطرنج و انجمن موسیقی مشغول کارند، خط بزنیم. به‌این ترتیب عددهایی که خط نخورده باقی می‌مانند، همان روزهایی خواهند بود که هیچ‌کدام از انجمن‌ها در مدرسه تشکیل نشده است.

کسی که این‌روزها را پیدا کند، متوجه می‌شود که تعداد آن‌ها، آن‌طور که در ظاهر به‌نظر می‌رسد، کم نیست. در واقع، ۲۴ روز به‌دست خواهد آمد: در ماه ژانویه ۸ روز (روزهای دوم، هشتم، دوازدهم، چهاردهم، هجدهم، بیستم، بیست و چهارم و سی‌ام)، در ماه فوریه ۷ روز و در ماه مارس ۹ روز.

۴. دو نفر به‌یک عدد می‌رسند، یعنی تعداد کسانی را که هریک از دو نفر می‌شمارد، یکی است.

آن که درپیاده‌رو ایستاده است تمام کسانی را که از دو طرف

می‌آیند و از کنار او رد می‌شوند، می‌شمارد. کسی هم که قدم می‌زند، ضمن دورشدن از دوستش، آن‌هایی را که درجهت مخالف می‌آیند (یعنی به‌طرف دوستش می‌روند) می‌شمارد و در برگشتن، به‌آن‌هایی برمی‌خورد که در سمت عکس پیاده‌های قبلی حرکت می‌کنند.

۵. در دید اول، گمان می‌رود که مسأله درست طرح نشده است، زیرا دراین‌صورت باید پدربزرگ و نوه همسال باشند. ولی همان‌طور که دراین‌جا می‌بینیم، مطلب کاملاً درست و دارای پاسخ است.

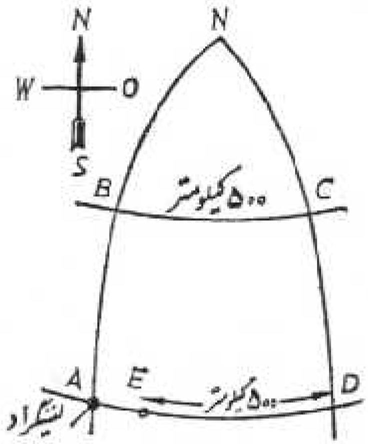
روشن است، نوه در سدهٔ بیستم به‌دنیا آمده و بنابراین دو رقم سمت چپ سال تولد او ۱۹ می‌باشد. دو رقم دیگر این سال باید چنان باشد که اگر با خودش جمع شود، عدد ۳۲ به‌دست آید، یعنی این دو رقم برابر با ۱۶ و سال تولد او ۱۹۱۶ میلادی است که در سال ۱۹۳۲، ۱۶ ساله می‌شود.

پدربزرگ در سده نوزدهم به‌دنیا آمده و دو رقم اول سمت چپ سال تولد او ۱۸ می‌باشد. بنابراین دو برابر بقیه رقم‌های سال تولد او باید ۱۳۲ بشود، یعنی خود این رقم‌ها نصف ۱۳۲ یعنی ۶۶ می‌شود. پدربزرگ در سال ۱۸۶۶ میلادی به‌دنیا آمده که در سال ۱۹۳۲، ۶۶ ساله است.

بنابراین، سن پدربزرگ و نوه در سال ۱۹۳۲ برابر است با دو رقم سمت راست سال تولد آن‌ها.

۶. درهریک از ایستگاه‌های راه‌آهن، مسافران می‌توانند برای هریک از بیست و چهار ایستگاه، بلیت تهیه کنند. بنابراین، باید روی هم به‌اندازه ۲۵ × ۲۴، یعنی ششصد گونهٔ مختلف بلیت وجود داشته باشد.

۷. دراین مسأله، هیچ‌گونه تناقضی وجود ندارد. نباید گمان کرد، هواپیما پیرامون یک مربع را می‌پیماید، بلکه باید کروی بودن زمین را به‌حساب آورد. بیشترین فاصلهٔ دو نصف‌النهار،روی خط استوا است. و هرچه به‌شمال نزدیک‌تر شویم، فاصلهٔ آن‌ها کمتر می‌شود. (شکل ۶). بنابراین، وقتی هواپیما روی مداری در ۵۰۰ کیلومتری شمال لنین‌گراد به‌اندازهٔ ۵۰۰ کیلومتر به‌طرف مشرق پرواز می‌کند، کمانی را طی می‌کند که برحسب درجه، بیشتر از کمانی است که، بعد از آن، روی مدار لنین‌گراد به‌طرف غرب می‌رود. درنتیجه، وقتی که پرواز هواپیما تمام می‌شود، در نقطه‌ایی واقع در شرق لنین‌گراد به‌زمین می‌نشیند. می‌توان فاصله هواپیما را تا لنین‌گراد محاسبه کرد. درشکل ۶، مسیر هواپیما عبارت است از $A\ B\ C\ D\ E$. نقطه N قطب شمال است و دراین نقطه، نصف‌النهارهای AB و CD به‌هم می‌رسند. هواپیما درآغاز روی نصف‌النهار AN به‌اندازهٔ ۵۰۰ کیلومتر به‌طرف



شکل ۶

شمال پرواز می‌کند. چون هردرجهٔ نصف‌النهار برابر با ۱۱۱ کیلومتر است، بنابراین کمانی از نصف‌النهار که برابر با ۵۰۰ کیلومتر باشد، ۴/۵ درجه (۱۱۱ : ۵۰۰) خواهد شد. لنین‌گراد، در ۶۰ درجهٔ عرض جغرافیایی قرار دارد (یعنی از خط استوا تا لنین‌گراد روی کمان نصف‌النهار، ۶۰ درجه داریم) و بنابراین، نقطهٔ B در ۶۴/۵ درجهٔ عرض جغرافیایی قرار دارد.

سپس، هواپیما به‌طرف شرق پرواز می‌کند و روی مدار BC به‌اندازهٔ ۵۰۰ کیلومتر جلو می‌رود. طول هردرجه از این مدار را می‌توان محاسبه کرد (و یا از روی جدول‌های مربوط دید). روی مدار ۶۴/۵ درجه، کمان ۱ درجه ۴۸ کیلومتر طول دارد. به‌این ترتیب، می‌توان محاسبه کرد، هواپیما چند درجه به‌طرف مشرق پرواز کرده است.

$$۵۰۰ : ۴۸ = ۱۰/۴^\circ$$

بعد، کشتی فضایی ما به‌طرف جنوب می‌رود، یعنی روی نصف‌النهار CD به‌اندازهٔ ۵۰۰ کیلومتر پرواز می‌کند و، بنابراین دوباره روی مدار لنین‌گراد قرار می‌گیرد. اکنون باید به‌سمت غرب برود، یعنی روی کمان DA. روی این مدار، کمان به‌طول ۵۰۰ کیلومتر کمتر از کمان DA می‌شود، زیرا کمان DA از لحاظ درجه با کمان BC برابر است (۱۰/۴ درجه). ولی طول ۱ درجه از مدار ۶۰ درجه (مدار لنین‌گراد) برابر است با ۵۵/۵ کیلومتر. بنابراین، طول کمان DA برابر می‌شود با:

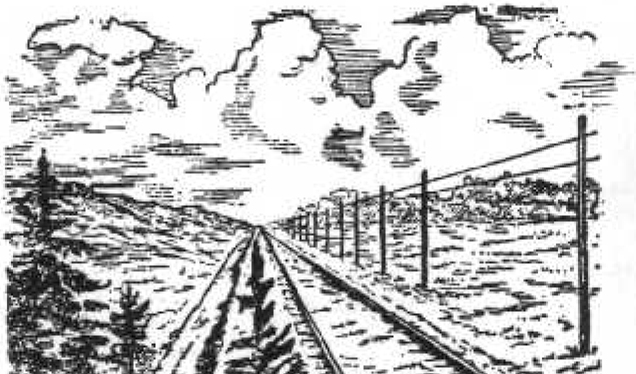
$$۵۵/۵ \times ۱۰/۴ = ۵۷۷ \text{ (کیلومتر)}$$

می‌بینیم هواپیما نمی‌تواند در لنین‌گراد به‌زمین بنشیند و در پایان پرواز، هنوز ۷۷ کیلومتر تا لنین‌گراد فاصله دارد، یعنی در دریاچهٔ

«لادوگا» فرود خواهد آمد.

۸. درگفت و شنودهایی که دربارهٔ این مسأله پیش آمد، اشتباه‌هایی به‌چشم می‌خورد. این درست نیست که وقتی پرتوهای خورشید به‌طرف زمین می‌آیند، از هم دور می‌شوند. زمین نسبت به‌فاصله‌ای که تا خورشید دارد، بسیار کوچک است و پرتوهایی از خورشید، که به‌نقطه‌های مختلف زمین می‌رسند، زاویهٔ بسیار کوچکی با هم می‌سازند که می‌توان عملاً آن را برابر صفر دانست. درنتیجه پرتوهای خورشیدی را باید موازی به‌حساب آورد. آن‌چه گاهی به‌نظر می‌رسد که پرتوهای خورشیدی از پشت ابرها از هم دور می‌شوند (شکل ۴ را ببینید) درواقع، چیزی جز نتیجه پرسپکتیو نیست. در پرسپکتیو، خط‌های راست موازی، هرچه دور می‌شوند، به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند. این مطلب را می‌توان از نزدیک شدن ریل‌های راه‌آهن (شکل ۷) و یا درختان دو طرف یک خیابان بهتر فهمید.

ولی از این مطلب که پرتوهای خورشیدی به‌طور موازی به‌زمین

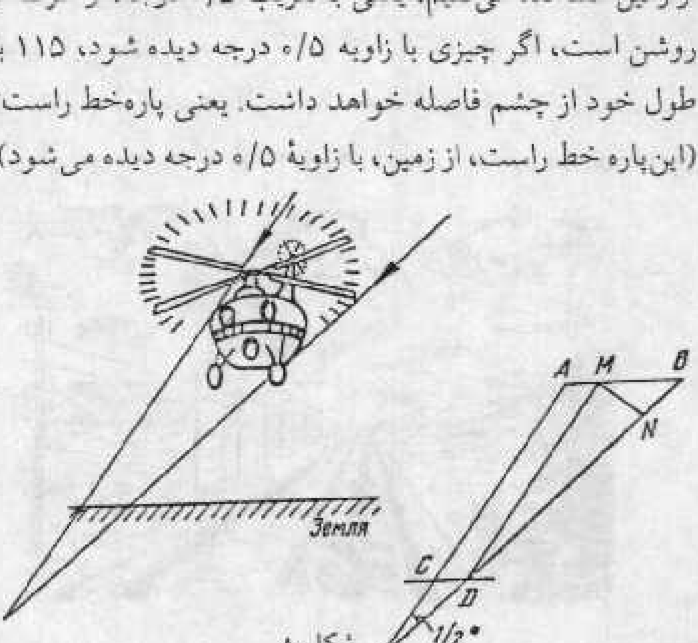


شکل ۷

می‌رسند، نمی‌توان این نتیجه را گرفت که سایهٔ کامل هواپیما، با خود هواپیما برابر است. اگر به‌شکل ۸ توجه کنید، می‌بینید که سایهٔ کامل هواپیما درفضا، درجهت زمین، به‌ترتیب محدودتر می‌شود. و بنابراین سایه‌ای که از آن برسطح زمین می‌افتد، باید کوچک‌تر از خود هواپیما باشد: CD کوچک‌تر است از AB

اگر ارتفاع هواپیما را بدانیم، می‌توانیم این اختلاف را محاسبه کنیم.

فرض کنید هواپیما در ارتفاع ۱۰۰۰ متری سطح زمین پرواز کند. زاویه‌ایی که خط‌های راست AC و BD با هم تشکیل می‌دهند، برابر است با قطر ظاهری خورشید، یعنی زاویه‌ای که تحت آن خورشید را از زمین مشاهده می‌کنیم، یعنی به‌تقریب ۰/۵ درجه. از طرف دیگر، روشن است، اگر چیزی با زاویه ۰/۵ درجه دیده شود، ۱۱۵ برابر طول خود از چشم فاصله خواهد داشت. یعنی پاره‌خط راست MN (این پاره خط راست، از زمین، با زاویهٔ ۰/۵ درجه دیده می‌شود) برابر



شکل ۸.

با $\frac{۱}{۱۱۵}$ فاصلهٔ AC خواهد بود. طول AC، از فاصلهٔ شاغولی A تاسطح زمین بزرگ‌تر است. اگر زاویهٔ بین جهت پرتوهای خورشیدی و سطح زمین برابر ۴۵ درجه باشد، طول AC (وقتی هواپیما درارتفاع ۱۰۰۰ متری است) در حدود ۱۴۰۰ متر خواهد بود و بنابراین این پاره‌خط راست MN برابر ۱۲ ($= \frac{۱۴۰۰}{۱۱۵}$) خواهد شد.

ولی اختلاف طول هواپیما با طول سایهٔ آن، یعنی MB، بزرگ‌تر از MN است و در حدود ۱/۴ برابر آن است، زیرا زاویهٔ MBD به‌تقریب برابر ۴۵ درجه است. به‌این ترتیب داریم:

$$|MB| = ۱۲ \times ۱/۴ = ۱۷$$

آن‌چه گفته شد، به‌سایهٔ کامل هواپیما مربوط است ـ سایهٔ سیاه و پررنگ ـ و به‌آن‌چه به‌اصطلاح «نیم‌سایه» می‌گویند (و کم‌رنگ و نازک است) بستگی ندارد.

این محاسبه نشان می‌دهد، اگر به‌جای هواپیما،بالن کوچک فضایی به‌قطر کمتر از ۱۷ متر درارتفاع ۱۰۰۰ متری داشته باشیم، سایهٔ کامل نخواهد داشت و تنها نیم سایه آن برزمین خواهد افتاد.

۹. مسأله را از آخر حل می‌کنیم. ازاین‌جا آغاز می‌کنیم که تعداد کبریت‌ها، بعد از همهٔ نقل و انتقال‌ها، درهرسه دسته با هم برابر شده‌اند. روشن است، با نقل و انتقال کبریت‌ها، تعداد کل آن‌ها تغییر نمی‌کند و چون روی هم ۴۸ کبریت داشتیم، در پایان عمل، درهردسته ۱۶ کبریت خواهد بود،یعنی:

دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ سوم
۱۶	۱۶	۱۶

بلافاصله قبل از آن، همان‌قدرکبریت که دردستهٔ اول وجود داشت

به‌آن اضافه شده است یا، به‌زبان دیگر، کبریت‌های دستهٔ اول دوبرابر شده است، یعنی پیش از آخرین تغییر، در دستهٔ اول، به‌جای ۱۶ کبریت، ۸ کبریت وجود داشته است. دستهٔ سوم هم، که از آن‌جا ۸ کبریت برداشته شده است، پیش از تغییر ۸ + ۱۶ یعنی ۲۴ کبریت داشته است.

اکنون تعداد کبریت‌ها در هردسته چنین است:

دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ سوم
۸	۱۶	۲۴

سپس: می‌دانیم پیش از آن، با استفاده از کبریت‌های دستهٔ دوم، کبریت‌های دستهٔ سوم دو برابر شده است. یعنی ۲۴، دو برابر تعداد کبریت‌هایی است که پیش از تغییر وجود داشته است. از این‌جا روشن می‌شود، تعداد کبریت‌های هردسته بعد از اولین تغییر چنین است.

دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ سوم
۸	۲۸	۱۲

به‌همین ترتیب، به‌سادگی روشن می‌شود، پیش از اولین تغییر (یعنی پیش از آن‌که به‌کمک کبریت‌های دستهٔ اول، کبریت‌های دستهٔ دوم را دو برابر کرده باشیم) تعداد کبریت‌ها در هردسته چنین است.

دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ سوم
۲۲	۱۴	۱۲

۱۰. این چیستان را هم بهتر است از آخر حل کنیم. می‌دانیم پس از آن‌که پول کیف برای مرتبهٔ سوم دو برابر شد، ۱۲۰ تومان در کیف وجود داشت (و این همان پولی است که آخرین بار به‌پیرمرد داده

شد). روشن است، پیش از دو برابر شدن، پول داخل کیف برابر ۶۰ تومان بوده است. این ۶۰ تومان بعد از پرداخت ۱۲۰ تومان دستمزد به پیرمرد (که برای بار دوم پول‌ها را دو برابر کرده بود) در کیف وجود داشت. بنابراین، پیش از این پرداخت ۱۸۰ تومان در کیف بوده است.

بنابراین موجودی کیف، بعد از آن که برای بار دوم دو برابر شد، ۱۸۰ تومان بود، یعنی پیش از آن ۹۰ تومان در کیف بوده است که اگر ۱۲۰ تومان دستمزد بار اول پیرمرد را به‌آن اضافه کنیم، روشن می‌شود، بعد از دو برابر شدن اول، پول درون کیف ۲۱۰ تومان و پیش از آن ۱۰۵ تومان بوده است.

پاسخ را آزمایش کنیم.

بعد از نخستین دو برابر شدن	$105 \times 2 = 210$
بعد از پرداخت اولین دستمزد	$210 - 120 = 90$
بعد از دومین دو برابر شدن	$90 \times 2 = 180$
بعد از پرداخت دومین دستمزد	$180 - 120 = 60$
بعد از سومین دو برابر شدن	$60 \times 2 = 120$
بعد از پرداخت سومین دستمزد	$120 - 120 = 0$

۱۱. تقویم امروزی ما (منظور تقویم فرنگی است)، از تقویم رومی‌های قدیم گرفته شده است. رومی‌ها (تا زمان ژول سزار) اول سال را، مارس می‌گرفتند، نه اول ژانویه. دراین‌صورت، دکابر ماه دهم سال می‌شد. وقتی اول سال را به‌اول ژانویه تغییر دادند، اسم ماه‌ها را عوض نکردند و، به‌همین سبب، تناقضی بین اسم ماه‌ها و شماره ردیف آن‌ها به‌وجود آمد.

۱۲. وقتی که هرسه رقم یک عدد سه رقمی را درسمت راست آن

بنویسیم، مثل این است که عدد را در ۱۰۰۱ ضرب کرده باشیم، زیرا به‌عنوان نمونه داریم:

$$872872 = 872000 + 872 = 872\,(1000 + 1) = 872 \times 1001$$

از طرف دیگر، عدد ۱۰۰۱ برابر است با حاصل‌ضرب سه عدد ۷ و ۱۱ و ۱۳:

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

و به‌همین مناسبت وقتی عدد ۸۷۲۸۷۲ را بر ۷ و سپس بر ۱۱ و بعد بر ۱۳ بخش کنیم، همانند آن است که آن را بر حاصل‌ضرب این سه عدد یعنی ۱۰۰۱ بخش کرده باشیم و بنابراین نتیجهٔ آخر، همان ۸۷۲ خواهد بود.

* * *

پیش از این‌که فصل مربوط به‌چیستان‌ها را به‌پایان ببریم، دربارهٔ سه حیله مربوط به‌حساب صحبت می‌کنیم که شما می‌توانید، دوستان خودتان را سرگرم کنید. دو تا از آن‌ها به‌کشف ویژگی‌های عددها و سومی به‌تعیین جای چیزها مربوط می‌شود.

البته، این‌ها مسأله‌های تازه‌ای نیستند و چه بسا، خیلی‌ها آن‌ها را بدانند، ولی به‌احتمال زیاد، کم‌اند کسانی که دربارهٔ دلیل آن‌ها آگاهی داشته باشند و روشن است، بدون آگاهی از پایهٔ نظری حیله، نمی‌توان با اطمینان از آن‌ها استفاده کرد. برای این‌که بنیان کار دو حیلهٔ اول را درک کنیم، تنها لازم است از جبر مقدماتی، اندکی آگاهی داشته باشیم.

۱۳. رقم حذف شده

دوست شما عدد دل‌خواهی را پیش خودش فکر می‌کند، به‌عنوان مثال ۸۴۷. به‌او پیشنهاد کنید، مجموع رقم‌های این عدد را به‌دست آورد.

$$۸ + ۴ + ۷ = ۱۹$$

و آن را از عدد اصلی کم کند:

$$۸۴۷ - ۱۹ = ۸۲۸$$

سپس از او بخواهید، یک رقم دل‌خواه را خط بزند و بقیّه رقم‌ها را به‌شما بگوید. شما بدون این‌که از عدد اصلی و با عددهای دیگری که ضمن عمل به‌دست آمده، آگاهی داشته باشید، خواهید توانست فوری رقمی را که حذف شده است به‌او بگویید. ببینیم رقم حذف شده را چگونه می‌توان پیدا کرد؟

پیدا کردن این رقم خیلی ساده است: مجموع رقم‌هایی را که به‌شما داده است، از نزدیک‌ترین عدد بخش‌پذیر بر ۹ کم کنید، حاصل برابر همان رقم حذف شده است.

اگر به‌عنوان مثال در عدد ۸۲۸ اولین رقم یعنی ۸ را حذف و دو رقم ۲ و ۸ را به‌شما داده باشند، مجموع ۸ + ۲ یعنی ۱۰ را، از ۱۸ (نزدیک‌ترین عدد بزرگ‌تر از ۱۰ که بر ۹ بخش‌پذیر است) کم کنید، رقم حذف شده یعنی ۸ به دست می‌آید.

چرا این رقم به‌این ترتیب به‌دست می‌آید؟

زیرا وقتی مجموع رقم‌های عددی را از خود عدد کم کنیم، عددی به‌دست می‌آید که بر ۹ بخش‌پذیر است (به‌زبان دیگر، مجموع رقم‌های تفاضل، بر ۹ بخش‌پذیر است). فرض کنید در عدد مورد

بحث، رقم یکان برابر c و رقم دهگان برابر b و رقم صدگان برابر با a باشد. بنابراین خود عدد برابر

$$۱۰۰a + ۱۰b + c$$

خواهد بود. از این عدد، مجموع رقم‌های آن یعنی

$$a + b + c$$

را کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱۰۰a + ۱۰b + c - (a + b + c) = ۹۹a + ۹b = ۹(۱۱a + b)$$

ولی روشن است $(۱۱a + b)$ ۹ بر ۹ بخش‌پذیر است. یعنی اگر مجموع رقم‌های عددی را از خود عدد کم کنیم، تفاضل همیشه بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود.

ضمن حل این مسأله ممکن است این حالت پیش آید که مجموع رقم‌هایی که به‌شما داده می‌شود، برابر ۹ شود (مثلاً ۴ و ۵). دراین حالت رقم حذف شده ممکن ۰ یا ۹ باشد و شما هم باید به‌همین ترتیب پاسخ بدهید: ۰ یا ۹.

این مسأله را به‌ترتیب زیر هم می‌توان طرح کرد: به‌جای این‌که مجموع رقم‌های عدد را از خود عدد کم کنیم، می‌توان از عدد مفروض، عددی راکم کرد که با همان رقم‌ها و با ترتیبی دیگر درست شده است. مثلاً از عدد ۸۲۴۷ می‌توان عدد ۲۷۴۸ را کم کرد (اگر دراین حالت عدد جدید بزرگ‌تر از عدد اول باشد، به‌هرحال عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنیم). نتیجه این کم‌کردن، چنین است:

$$۸۲۴۷ - ۲۷۴۸ = ۵۴۹۹$$

و اگر مثلاً رقم ۴ را خط زده و رقم‌های ۵ و ۹ و ۹ را درنظر بگیریم

مجموع آن‌ها ۲۳ (= ۹ + ۹ + ۵) می‌شود، نزدیک‌ترین عدد بزرگ‌تر از ۲۳ که بر ۹ بخش‌پذیر باشد، ۲۷ است و، بنابراین، رقم حذف شده برابر ۴ (= ۲۳ - ۲۷) خواهد بود.

۱۴*. بدون هیچ پرسشی، عدد را پیدا می‌کنید.

به‌دوست خود پیشنهاد کنید، عدد سه رقمی دلخواهی در نظر بگیرد (تنها این شرط را رعایت کند که تفاضل دو رقم یکان و صدگان، کمتر از ۲ نباشد) و خواهش کنید رقم‌های این عدد را به‌ردیف عکس هم بنویسد (یعنی مقلوب عدد را به‌دست آورد). اکنون باید دو عددی را که در دست دارد از یک دیگر کم کند و این تفاضل را با مقلوب خودش جمع کند. دراین صورت شما می‌توانید، بدون این‌که چیزی از دوست خود بپرسید، حاصل جمع پایان کار را به‌او بگویید.

فرض کنید عددی که دوست شما در نظر گرفته است برابر ۴۶۷ باشد. باید عمل‌های زیر را انجام دهد:

۴۶۷؛ ۷۶۴؛

$$\begin{array}{r} ۷۶۴ \\ -\ ۴۶۷ \\ \hline ۲۹۷ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۲۹۷ \\ +\ ۷۹۲ \\ \hline ۱۰۸۹ \end{array}$$

و شما می‌توانید همین نتیجه، یعنی ۱۰۸۹ را به‌دوست خود اعلام کنید.

از کجا می‌توان نتیجه را فهمید؟

مسأله را در حالت کلی خود درنظر بگیرید. عدد را با رقم‌های a (صدگان) و b (دهگان) و c (یکان) درنظر می‌گیریم، بنابراین مقدار عدد چنین است:

$$۱۰۰a+۱۰b+c$$

و عددی که با همین رقم‌ها، ولی به‌ردیف عکس نوشته شده باشد، چنین است:

$$۱۰۰c+۱۰b+a$$

تفاضل این دو عدد برابر است با:

$$۹۹a-۹۹c$$

دراین تفاضل می توان تبدیل‌های زیر را انجام داد:

$$۹۹a-۹۹c=۹۹(a-c)=۱۰۰(a-c)-(a-c)=$$
$$=۱۰۰(a-c)-۱۰۰+۱۰۰-۱۰+۱۰-a+c=$$
$$=۱۰۰(a-c-۱)+۹۰+(۱۰-a+c)$$

یعنی تفاضل، از رقم‌های زیر تشکیل شده است:

رقم صدگان	$a-c-۱$
رقم دهگان	۹
رقم یکان	$۱۰+c-a$

و عددی که با همین رقم‌ها، ولی به‌ردیف عکس نوشته شده باشد، چنین است:

$$۱۰۰(۱۰+c-a)+۹۰+(a-c-۱)$$

واگر این دو عدد را با هم جمع کنیم، به‌دست می آید:

$$[۱۰۰(a-c-۱)+۹۰+(۱۰+c-a)]+$$
$$+[۱۰۰(۱۰+c-a)+۹۰+(a-c-۱)]=$$
$$=۱۰۰\times۹+۱۸۰+۹=۱۰۸۹$$

همان‌طور که دیده می‌شود، به‌ازای هرمقدار دل‌خواه a و b و c

همیشه عدد ۱۰۸۹ به‌دست می‌آید. بنابراین پیش‌بینی نتیجهٔ عمل خیلی ساده است. زیرا شما آن را از قبل می‌دانید.

روشن است که از این حیله بیش از یک بار نباید استفاده کرد، زیرا دراین‌صورت راز شما را پیدا خواهند کرد.

۱۵. جای چیزها را پیدا کنید؟

برای انجام این سرگرمی، به‌سه چیز کوچک نیاز داریم، به‌طوری که بتوان آن‌ها را در جیب جای داد، مثل مداد، کلید و چاقو. به‌جز این، بشقابی روی میز بگذارید و در آن ۲۴ عدد گردو قرار دهید. اگر گردو نباشد، می‌توان از مهرهٔ شطرنج، کبریت و چیز دیگری استفاده کرد.

به‌سه نفر از دوستان خود پیشنهاد کنید، وقتی شما از اتاق بیرون می‌روید در غیاب شما، هرکدام یکی از سه چیز (مداد، کلید و چاقو) را در جیب خودشان بگذارند، به‌طوری که شما متوجه نشوید، کدام چیز درجیب چه کسی است! شما کشف خواهید کرد که هریک از این چیزها در جیب کدام دوست شما است!

جریان کشف به‌این ترتیب است: بعد از آن که چیزها را در جیب خود پنهان کردند، شما به‌اتاق بر می‌گردید و از گردوهایی که در بشقاب گذاشته‌اید، بین آن‌ها تقسیم می‌کنید، به‌این صورت که به‌اولی یک عدد، به‌دومی دو و به‌سومی سه عدد گردو می‌دهید. سپس، دوباره از اتاق بیرون می‌روید و به‌دوستان خود سفارش می‌کنید، هرکدام باز هم تعدادی گردو از بشقاب بردارند؛ به‌این ترتیب: آن که مداد را در جیب خود پنهان کرده به‌همان اندازه گردو که به‌او داده

شده است، و آن که کلید دارد دو برابر آن‌چه به‌او داده شده است و سرانجام آن که چاقو را برداشته است چهاربرابر تعداد گردوهایی که دارد.

و بقیه گردوها در بشقاب بماند.

وقتی دوستان شما کار خود را به‌پایان رسانند، اشاره می‌کنند و شما به‌اتاق بر می‌گردید. با دیدن گردوهایی که در بشقاب باقی مانده است، خواهید گفت، چه کسی چه چیزی را در جیب دارد.

شما می‌توانید جای هرچیز را پیدا کنید، بدون این‌که کسی به‌طور پنهانی شما را آگاه کند و یا با اشاره به‌یاری شما بیاید. در واقع، هیچ فریبی درکار نیست و حل مسأله، برپایهٔ محاسبهٔ ساده‌ای قرار دارد. شما صاحب هرچیز را از روی تعداد گردوهایی که در بشقاب باقی مانده است، کشف می‌کنید. گردوهایی هم که در بشقاب باقی مانده، زیاد نیست. (از ۱ تا ۷) و شما می‌توانید با یک نگاه، تعداد آن‌ها را بفهمید.

ولی چگونه می‌توان از روی تعداد گردوهای باقی مانده، صاحب هرچیز را پیدا کرد؟

خیلی ساده است: هریک از حالت‌های ممکن، با تعداد ویژه‌ای از گردوهای باقی مانده، تطبیق می‌کند. بعد از محاسبهٔ زیر دراین باره مطمئن خواهید شد.

دوستان شما را ولادیمیر، ژرژ و کنستانتین فرض می‌کنیم و آن‌ها را با حرف اول اسمشان (و، ژ، ک) می‌نامیم. در مورد چیزها مداد را با a کلید را با b و چاقو را با c نشان می‌دهیم. این سه‌چیز به‌چند نوع می‌توانند بین دوستان شما تقسیم شده باشد؟ تنها ۶ نوع.

ک	ژ	و
c	b	a
b	c	a
c	a	b
a	c	b
b	a	c
a	b	c

حالت دیگری وجود ندارد، جدولی که دراین جا آوردیم همهٔ حالت‌های ممکن را نشان داده است. حالا ببینیم درهریک از این شش حالت، چند گردو باقی می‌ماند.

باقیمانده	جمع آنها	تعداد گردوهائی که برداشته شده	ک. ژ. و
۱	۲۳	۳+۱۲=۱۵ ، ۲+۴=۶ ، ۱+۱=۲	$a\ b\ c$
۳	۲۱	۳+۶=۹ ، ۲+۸=۱۰ ، ۱+۱=۲	$a\ c\ b$
۲	۲۲	۳+۱۲=۱۵ ، ۲+۲=۴ ، ۱+۲=۳	$b\ a\ c$
۵	۱۹	۳+۳=۶ ، ۲+۸=۱۰ ، ۱+۲=۳	$b\ c\ a$
۶	۱۸	۳+۶=۹ ، ۲+۲=۴ ، ۱+۴=۵	$c\ a\ b$
۷	۱۷	۳+۳=۶ ، ۲+۴=۶ ، ۱+۴=۵	$c\ b\ a$

می‌بینید، تعداد گردوهای باقی مانده، در حالت‌های مختلف، با هم فرق می‌کنند و بنابراین وقتی تعداد گردوهای بشقاب را بدانید، می‌توانید بفهمید، هریک از چیزها نزد کدام دوست شما است! شما

برای بار سوم از اتاق بیرون می‌روید، به‌دفترچه خود که در آن‌جا حالت‌های مختلف این جدول را یادداشت کرده‌اید، نگاه می‌کنید (البته، کافی است در دفتر خود تنها ستون اول و آخر را یادداشت کرده باشید). حفظ کردن این حالت‌ها دشوار است و لزومی هم ندارد. جدول نشان می‌دهد، در جیب هرکدام چه چیزی قرار دارد. اگر به‌عنوان مثال، در بشقاب‌ها ۵ گردو باقی مانده باشد، حالت $(b\ c\ a)$ را خواهید داشت، یعنی:

کلید نزد ولادیمیر است.

چاقو در جیب ژرژ است.

مداد پیش کنستانتین است.

برای این که اشتباه نکنید، باید خوب بخاطر بسپارید، به‌هر کس چند گردو داده‌اید (بهتر است برای این‌منظور دوستان خود را مثلاً برحسب حرف‌های الفبا ردیف کنید).

۲

ریاضیات در بازی‌ها

۱۶. زنجیری با ۲۸ سنگ دو مینو

چرا می‌توان ۲۸ سنگ‌بازی دومینو را، با رعایت قاعدهٔ بازی، دریک ردیف و به‌دنبال هم چید؟

۱۷. آغاز و پایان زنجیر

با هر ۲۸ سنگ‌بازی دومینو، زنجیری درست کرده‌ایم که دریکی از دو سر آن ۵ خال وجود دارد. درانتهای دیگر این زنجیر، کدام خال است؟

۱۸. شیرین‌کاری

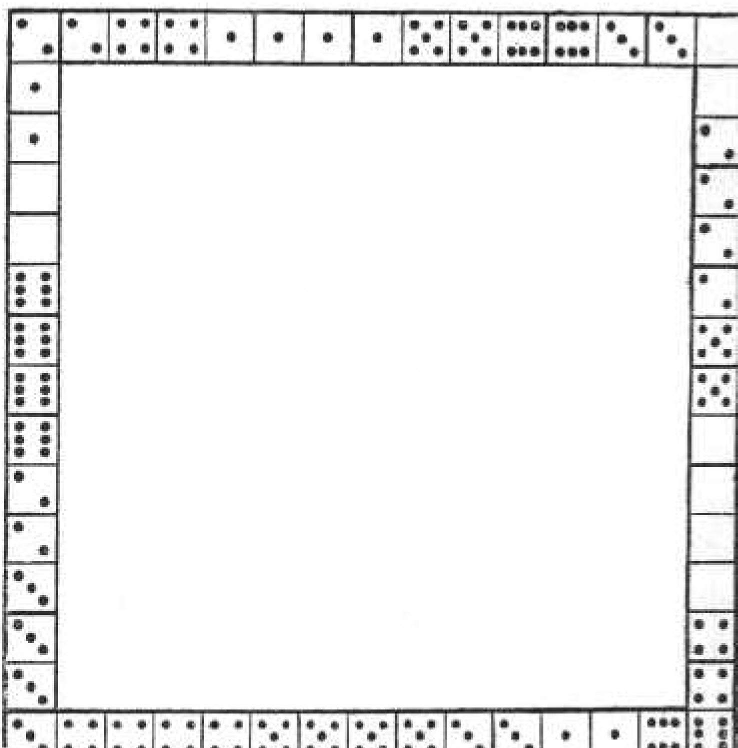
دوست شما یکی از سنگ‌های دومینو را بر می‌دارد و از شما می‌خواهد، با ۲۷ سنگ باقی مانده، یک زنجیر درست کنید. درضمن، به‌شما اطمینان می‌دهد، این‌کار همیشه ممکن است (یعنی هرسنگی را جدا کنیم، با ۲۷ سنگ دیگر می‌توان یک زنجیر ساخت).

دوست شما به‌اتاق دیگر می‌رود و شما مشغول می‌شوید، بعد از آن که کارتان به‌پایان رسید، دوست شما، بدون این‌که شیوهٔ کار شمارا ببیند، خال‌های دو سر زنجیر را به‌شما می‌گوید.

دوست شما چگونه تعداد خال‌های دو سر زنجیر را می‌فهمد؟ از کجا اطمینان دارد که با ۲۷ سنگ دومینو (هرطور که انتخاب شده باشند) می‌توان یک زنجیر درست کرد؟

۱۹. مربعی با سنگ‌های دومینو

شکل ۹، مربعی را نشان می‌دهد که با سنگ‌های دومینو، با رعایت قاعدهٔ بازی دومینو، ساخته شده است. طول ضلع‌های این مربع با هم

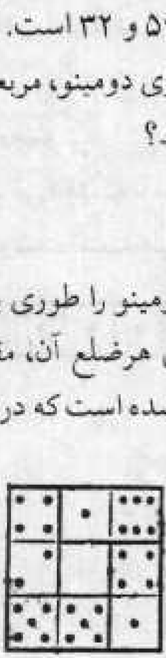


شکل ۹

برابر است، ولی مجموع تعداد خال‌های آن‌ها یکی نیست. ضلع بالا و ضلع سمت چپ هرکدام ۴۴ خال دارد، درحالی که تعداد خال‌های دو ضلع دیگر، به‌ترتیب ۵۹ و ۳۲ است. آیا می‌توانید با سنگ‌های دومینو، با رعایت روش بازی دومینو، مربعی بسازید که درهرضلع آن ۴۴ خال وجود داشته باشد؟

۲۰. هفت مربع

می‌توان چهار سنگ دومینو را طوری برگزید و با آن‌ها مربعی ساخت که تعداد خال‌های هرضلع آن، مقدار ثابتی باشد (مثلاً در شکل ۱۰، مربعی ساخته شده است که در هرضلع آن ۱۱ خال وجود دارد).



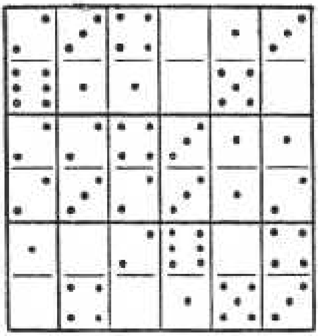
شکل ۱۰

آیا می‌توانید با تمام ۲۸ سنگ دومینو، ۷ مربع بسازید؟

دراین مورد لازم نیست، تعداد خال‌های هرضلع در مربع‌های مختلف یکی باشد، کافی است در هر مربع، تعداد خال‌های چهار ضلع یکی شود.

۲۱. مربع‌های جادویی با سنگ‌های دومینو

در شکل ۱۱، مربعی با ۱۸ سنگ دومینو نشان داده شده است.



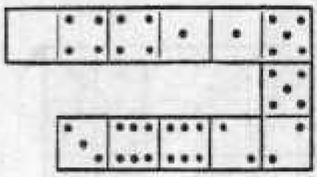
شکل ۱۱

دراین مربع، تعداد خال‌های روی هرسطر، یا هرستون، یا هر قطر برابر است با ۱۳. چنین مربع‌هایی را از قدیم، **مربع‌های جادویی** نام داده‌اند.

اکنون شما با ۱۸ سنگ دومینو چند نمونه دیگر از این مربع‌های جادویی درست کنید که مجموع تعداد خال‌های آن در هر سطر یا ستون یا قطر، مساوی ۱۳ نباشد. وقتی با ۱۸ سنگ دومینو، مربع جادویی درست کنیم، دست کم تعداد خال‌ها در هرسطر برابر ۱۳ و دست بالا، این تعداد برابر ۲۳ می‌شود.

۲۲. تصاعد

در شکل ۱۲، ۶ سنگ دومینو می‌بینید که با روش بازی دومینو کنار هم چیده شده‌اند. در ضمن، به‌ترتیب تعداد خال‌های هرسنگ، یک واحد از تعداد خال‌های سنگ پیش از خود، بیشتر است.



شکل ۱۲

تعداد خال‌های سنگ‌ها، این عددها را به‌دنبال هم می‌آورد:

۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴

می‌دانیم، چنین رشته‌ایی را (که تفاضل هردو عدد پشت سرهم آن، مقدار ثابتی باشد)، **تصاعد حسابی** و این تفاضل ثابت را **قدر نسبت** تصاعد گویند.

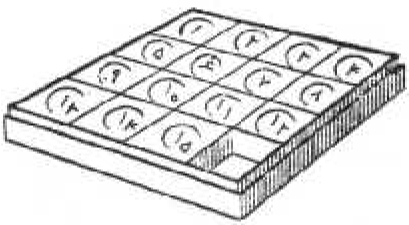
دراین‌جا، قدر نسبت تصاعد برابر واحد است، ولی می‌توان تصاعدهایی با قدر نسبت‌های دیگر داشت.

می‌خواهیم تصاعدهایی به‌کمک ۶ سنگ دومینو بسازیم.

بازی با ۱۵

بازی با ۱۵، که از یک جعبهٔ مربع شکل با ۱۵ مهرهٔ شماره‌دار متحرک درست شده است (شکل ۱۳)، تاریخچهٔ جالبی دارد که کمتر کسی (حتا آن‌ها که با این بازی خود را مشغول می‌کنند) از آن آگاه است. ما اندکی درباره آن از زبان **ویلیام آرنس**، ریاضی‌دان آلمانی، که بررسی‌هایی دربارهٔ بازی‌ها دارد، می‌آوریم.

درسال‌های پایانی دههٔ ۷۰ سدهٔ پیش، در امریکا بازی جدیدی به‌نام «بازی با ۱۵» پیدا شد که سرعت و وسعت انتشار آن، چیزی شبیه یک بلای عمومی شده بود.



شکل ۱۳

جنون این بازی به‌این سوی اقیانوس، یعنی به‌اروپا هم سرایت کرد. این‌جا حتا در واگون‌های اسبی می‌شد به‌مسافرانی برخورد که جعبهٔ محتوی ۱۵ مهره را در دست دارند. در اداره‌ها و مغازه‌ها، همه‌جا به «بازی با ۱۵» مشغول بودند، به‌نحوی که سرانجام ناچار شدند با بخش‌نامه‌ایی «بازی با ۱۵» را هنگام کار ممنوع کنند.

در عوض، صاحبان مؤسسه‌های تفریحی، با استفاده از روحیهٔ مردم، مسابقه‌هایی به‌طور گسترده ترتیب دادند و از این راه جیب خود را پر کردند.

بازی به‌سالن پرشکوه مجلس آلمان هم راه یافت. **زیگموند گونتر**، ریاضی‌دان و جغرافی‌دان آلمانی، که درآن زمان نمایندهٔ مجلس بود، از همکارانش یاد می‌کند که جعبهٔ «بازی با ۱۵» را در دست دارند و روی آن می‌اندیشند.

در پاریس، در خیابان‌ها، پارک‌ها و بولوارها، به‌این بازی مشغول بودند. بازی به‌تندی از پای تخت به‌شهرهای دیگر هم سرایت کرد. یک نویسنده فرانسوی می‌گوید: «هیچ خانهٔ خلوت روستایی پیدا نمی‌شود که درآن، این عنکبوت، درکمین قربانی خود ننشسته باشد،

تا او را به‌درون تارهای خود بکشد».

در سال ۱۸۸۰، تب بازی به‌اوج خود رسید. ولی دیگر پای مبارزهٔ ریاضی‌دان‌ها به‌میدان آمد. نظریهٔ ریاضی بازی‌ها، ثابت کرد، نیمی از چیستان‌های مربوط به‌«بازی با ۱۵» قابل حل نیست و به‌این ترتیب، این بازی را از تب و تاب خود انداخت.

روشن شد، چرا مسأله‌های زیادی از این بازی قابل حل نیستند و چرا صاحبان مرکزهای تفریحی از تعیین جایزه‌های بزرگ، برای حل آن‌ها بیمی ندارند. خود کسی که این بازی را درست کرده بود **(ساموئل لوید)** از ناشر روزنامهٔ نیویورک خواست تا برای حل یکی از چیستان‌های مربوط به‌این بازی، ۱۰۰ دلار جایزه تعیین کند، و وقتی متوجه نگرانی ناشر از این مبلغ زیاد شد، خود پرداخت آن را به‌عهده گرفت. درآن زمان **سام بلوید** (سام کوتاه شده ساموئل است) به‌خاطر مسأله‌های سرگرم‌کنندهٔ معمایی، شهرت زیادی کسب کرده بود. با وجود این، نتوانست اختراع «بازی با ۱۵» خود را در آمریکا به‌ثبت برساند. علت این امر آن بود که او راه حل عملی برای حل مسأله‌ای که خود طرح کرده بود، نداشت. وقتی از او پرسیدند:

آیا این مسأله راه حلی دارد یا نه، چاره‌ای جز این نداشت که پاسخ

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	

شکل ۱۴

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۵	۱۴	

شکل ۱۵

دهد: «از نظر ریاضی، این مسأله قابل حل نیست». بنابراین اختراع او بدون نمونهٔ عملی بود و اختراعی هم‌که نمونه عملی نداشته باشد، از نظر قانون آمریکا، قابل ثبت نیست.

لوید به‌این استدلال تسلیم شد، ولی اگر پیروزی بی‌اندازهٔ اختراعش را پیش‌بینی می‌کرد، شاید برای به‌ثبت رساندن آن، اصرار بیشتری می‌کرد[1].

تکه‌ای را از زبان مخترع بازی نقل می‌کنیم. لوید می‌نویسد:

«همهٔ کسانی که مشتاق سرگرمی هستند، به‌خاطر دارند، در ابتدای سال‌های دههٔ ۷۰، چگونه توانستم مردم جهان را وادارم تا سرهای خود را روی جعبهٔ کوچکی با مهره‌های متحرک خم کنند، جعبه‌ای که به«بازی با ۱۵» مشهور شد (شکل ۱۴). دراین جعبهٔ کوچک مربع شکل، ۱۵ مهرهٔ شماره‌دار گذاشته شده بود که همهٔ آن‌ها به‌ترتیب

شکل ۱۶. همه در مقابل بازی با ۱۵، کسب و کار خود را فراموش کرده بودند.

۱. از این پیش‌آمد مارک تواین، در رمان خود به‌نام «مدعی آمریکایی» استفاده کرده است.

چیده شده بودند، جز دو شمارهٔ آخر (۱۴ و ۱۵) که جای آن‌ها با هم عوض شده بود (شکل ۱۵). مسأله چنین بود که با جابه‌جا کردن مهره‌ها، آن‌ها را به‌وضعی در آوریم که همهٔ مهره‌ها (از ۱ تا ۱۵) به‌ترتیب پشت‌سر هم قرار گیرند.

با آن که همه، بدون احساس خستگی، به‌حل مسأله مشغول بودند، هیچ‌کس نتوانست جایزه ۱۰۰۰ دلاری را (که قرار بود به‌اولین کسی که مسأله را درست حل کند، پرداخت شود) ببرد.

داستان‌های بامزه‌ایی نقل می‌کنند که چگونه بازرگانان به‌خاطر این معما فراموش می‌کردند مغازه‌های خود را باز کنند، چگونه کارمندان محترم، تمام شب را درکنار فانوس‌های دستی بیدار می‌ماندند تا شاید راهی برای حل این چیستان پیدا کنند. هیچ‌کس نمی‌خواست از جست و جوی پاسخ صرف‌نظر کند، زیرا همه اطمینان داشتند که سرانجام پیروز می‌شوند. دریانوردان به‌خاطر این بازی، کشتی را دچار سانحه می‌کردند، لوکوموتیوران‌ها از ایستگاه‌ها رد می‌شدند. دهقانان گاوآهن خود را زمین می‌گذاشتند.

اکنون خواننده را با نکته‌های ساده‌ای از نظریهٔ این بازی آشنا می‌کنیم.

نظریهٔ کلی این بازی خیلی پیچیده است، و در واقع، به‌یکی از بخش‌های جبر عالی (نظریهٔ دترمینان‌ها) بستگی دارد، دراین‌جا تنها به‌برخی ملاحظه‌ها که «ویلیام آرنس» آورده است، بسنده می‌کنیم:

«مسأله مربوط به‌این بازی، درحالت عادی عبارت است از این که مهره‌های بازی را، با استفاده از خانهٔ آزادی که وجود دارد، چنان

جابه‌جا کنیم تا ردیف آن‌ها از حالت دل‌خواهی که روی جعبه دیده می‌شود، به‌حالت طبیعی برگردد؛ یعنی مهره‌ها به‌ردیف شماره‌های خود قرار گیرند:

گوشهٔ چپ و بالا، شمارهٔ ۱؛ سمت راست آن شمارهٔ ۲؛ بعد شمارهٔ ۳؛ سپس در گوشهٔ بالا و سمت راست، شمارهٔ ۴؛ در ردیف دوم از چپ به‌راست، شماره‌های از ۵ تا ۸ و غیره. این وضع طبیعی مهره‌ها را، در شکل ۱۴ نشان داده‌ایم.

اکنون فرض کنید، ۱۵ مهره به‌ترتیب نامشخص قرار گرفته باشند. همیشه می‌توان با تعدادی حرکت، مهرهٔ شمارهٔ ۱ را درجای اصلی خودش قرار داد.

به‌همین ترتیب می‌توان، بدون دست‌زدن به‌مهرهٔ شمارهٔ ۱، مهره شمارهٔ ۲ را هم درجای خودش (سمت راست شمارهٔ ۱) قرار داد. سپس، بدون دست‌زدن به‌مهره‌های ۱ و ۲، می‌توان مهره‌های ۳ و ۴ را هم درجای خودشان قرار داد؛ دراین مورد، اگر دو مهرهٔ اخیر در ردیف‌های پشت سرهم عمودی قرار نگرفته باشند، بهتر است ابتدا آن‌ها را به‌این صورت درآورد و بعد با چند حرکت، به‌جای اصلی منتقل کرد. به‌این ترتیب، چهار شمارهٔ ۱، ۲، ۳، ۴ درجای خود در ردیف بالا قرارگرفته‌اند و برای حرکت‌های بعدی، لازم نیست به‌آن‌ها دست بزنیم. به‌همین ترتیب ردیف دوم را هم منظم می‌کنیم و شماره‌های ۵ تا ۸ را درجای خودشان می‌گذاریم؛ به‌سادگی معلوم می‌شود، این عمل، همیشه میسر است. بعد باید شماره‌های ۹ و ۱۳ را در ردیف عمودی، در جای خودشان قرار دهیم، که باز هم همیشه ممکن است. هیچ‌کدام از مهره‌های ۱ تا ۸ و ۹ و ۱۳ را، که تاکنون

منظم کرده‌ایم، در حرکت‌های بعدی جابه‌جا نمی‌کنیم؛ شش خانه باقی می‌ماند که یکی از آن‌ها آزاد است و بقیه به‌وسیلهٔ شماره‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴ و ۱۵ به‌ترتیب بی‌نظمی اشغال شده است.

دراین وضع، همیشه می‌توان شماره‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ را در جای خود قرار داد. وقتی به‌این مرحله برسیم، دو شمارهٔ ۱۴ و ۱۵، یا در جای طبیعی خود هستند و یا به‌طور نامرتب (شکل ۱۵). با این روش، که خواننده می‌تواند به‌سادگی و در عمل آن را آزمایش کند، به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

هر وضع نخستین مهره‌ها را می‌توان یا به‌صورت شکل ۱۴ (وضع I) و یا به‌صورت شکل ۱۵ (وضع II) درآورد.

اگر وضعی از مهره‌ها (که برای سادگی کار، آن را وضع S می‌نامیم)، قابل تبدیل به‌وضع I باشد، روشن است که می‌توان درجهت عکس هم عمل کرد و وضع طبیعی را به‌وضع S تبدیل کرد. به‌طور کلی حرکت مهره‌ها، یک حرکت دوجانبه است، یعنی اگر بتوان در وضع I، مهره شماره ۱۲ را به‌خانهٔ آزاد منتقل کرد، بلافاصله می‌توان حرکت عکس را هم انجام داد و مهرهٔ خانه آزاد را به‌خانه شماره ۱۲ برد.

به‌این ترتیب، می‌توانیم همهٔ ترکیب‌های مختلف استقرار مهره‌ها را به‌دو حالت تقسیم کنیم، به‌نحوی که یکی از آن ها منجر به‌وضع I و دیگری منجر به‌وضع II شود.

برعکس از وضع I می‌توان به‌یکی از گونه‌های حالت اول و از وضع II به‌یکی از گونه‌های حالت دوم رسید. سرانجام، هردو ترکیب مختلفی را که به‌یکی از این دو حالت مربوط باشد، می‌توان به‌هم تبدیل کرد.

آیا می‌شود دو ترکیب از دو حالت مختلف *I* و *II* را به‌هم تبدیل کرد. می‌توان ثابت کرد (و ما دراین جا از تفصیل بحث می‌گذریم) که این تبدیل ممکن نیست. به‌این مناسبت، گونه‌های مختلف استقرار مهره‌ها را (که تعداد آن‌ها بسیار زیاد است) می‌توان به‌دو گروه تقسیم کرد: ۱) آن‌هایی که قابل تبدیل به‌وضع طبیعی هستند (وضع *I*)، و این‌ها ترکیب‌های قابل حل‌اند؛ ۲) آن‌هایی که قابل تبدیل به‌وضع *II* هستند و درنتیجه با هیچ حرکتی به‌وضع طبیعی نمی‌رسند، و این‌ها همان ترکیب‌هایی هستند که برای حل آن‌ها، جایزه‌های بزرگ تعیین می‌کرده‌اند.

چگونه می‌توان تشخیص داد، یک ترکیب مشخص، متعلق به کدام گروه است؟ با مثال مطلب را روشن می‌کنیم:

فرض کنیم ۴ مهرهٔ ردیف اول منظم باشد (شکل ۱۷)؛ هم‌چنین ردیف دوم به‌جز شمارهٔ آخر این ردیف، یعنی در واقع مهره‌های شماره ۸ و ۹ جای خود را با هم عوض کرده باشند. شماره ۹ قبل از شماره ۸ آمده است؛ این به‌هم خوردگی وضع طبیعی را «بی‌ترتیبی» می‌نامیم. در مورد مهرهٔ شماره ۹، می‌گوییم یک «بی‌ترتیبی» وجود دارد. به‌مهره‌های بعدی توجه می‌کنیم.

۴	۳	۲	۱
۹	۷	۶	۵
۱۲	۱۴	۱۰	۸
	۱۵	۱۱	۱۳

شکل ۱۷

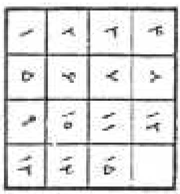
مهرهٔ شمارهٔ ۱۴، سه خانه پیش از جای طبیعی خود قرار گرفته است، یعنی دراین جا ۳ «بی‌ترتیبی» وجود دارد (۱۴ قبل از ۱۲ است، ۱۴ قبل از ۱۳ است، ۱۴ قبل از ۱۱ است). بنابراین، دراین وضع تا این‌جا، ۳+۱، یعنی ۴ «بی‌ترتیبی» پیدا شده است.

بعد می‌بینیم مهره شمارهٔ ۱۲ پیش از شمارهٔ ۱۱ قرار گرفته است، همین‌طور مهرهٔ شمارهٔ ۱۳ هم پیش از شمارهٔ ۱۱ واقع شده و دو «بی‌ترتیبی» به‌وجود آورده است. بنابراین، دراین وضع، روی هم شش «بی‌ترتیبی» وجود دارد. به‌این ترتیب، می‌توانیم تعداد «بی‌ترتیبی»ها را در هروضع محاسبه کنیم؛ البته خانهٔ آزاد جدول را باید درگوشهٔ پایین و سمت راست به‌حساب آورد. اگر تعداد کل «بی‌ترتیبی»ها **زوج** باشد (مثل حالت بالا)، می‌توان وضع مفروض مهره‌ها را، به‌وضع طبیعی تبدیل کرد، به‌زبان دیگر، مسأله‌ای قابل حل است. ولی اگر تعداد «بی‌ترتیبی»ها **فرد** باشد، وضع موجود مربوط به‌گروه دوم می‌شود، یعنی مسأله‌ای قابل حل نیست (صفر را عددی زوج به‌حساب می‌آوریم). پرتوی که ریاضیات به‌این بازی افکند، آن را از تب و تاب خود انداخت. ریاضی‌دان‌ها نظریهٔ این بازی را با دقت کامل تنظیم کردند، به‌نحوی که هیچ شکی درهیچ زمینه‌ای باقی نمی‌گذاشت. روشن شد حرکت‌های این بازی، مثل برخی بازی‌های دیگر، به‌تصادف یا تیزهوشی بستگی ندارد، بلکه تنها به‌عامل‌های ریاضی، که از قبل قابل پیش‌بینی هستند، مربوط می‌شوند.

اکنون چند مسأله قابل حل را که مخترع بازی طرح کرده است می‌آوریم.

۲۳. مسالهٔ اول لوید

با آغاز از وضعی که در شکل ۱۵ نشان داده شده است، مهره‌ها را به‌ترتیب شماره منظم کنید، به‌نحوی که خانهٔ آزاد در گوشهٔ چپ و بالای جعبه قرار گیرد (شکل ۱۸)



شکل ۱۹

	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷
۸	۹	۱۰	۱۱
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵

شکل ۱۸

۲۴. مسالهٔ دوم لوید

از وضع شکل ۱۵ آغاز کنید، جعبه را به‌اندازهٔ ۹۰ درجه بچرخانید و مهره‌ها را جابه‌جا کنید تا به‌وضع شکل ۱۹ درآیند.

۲۵. مسالهٔ سوم لوید

وضع نخستین مهره‌ها را شبیه شکل ۱۱ در نظر بگیرید و سپس با جابه‌جا کردن مهره‌ها، یک «مربع جادویی» بسازید، به‌نحوی که مجموع شماره‌ها از هرسو، برابر ۳۰ باشد.

کراکت

چیستان‌هایی که دربارهٔ دومینو و بازی با ۱۵ آوردیم، همه در زمینهٔ حساب بود. اکنون به چند چیستان درباره بازی کراکت می‌پردازیم که

بیشتر جنبهٔ هندسی دارد.

۲۶. از دروازه عبور کنیم یا توپ حریف را بزنیم؟

دروازه‌ای که باید توپ از آن رد شود، به‌شکل مستطیل است. پهنای این دروازه دو برابر قطر توپ است. با این شرط‌ها، کدام ساده‌تر است: توپ را به‌طور آزاد (یعنی بدون‌این که به‌سیم‌های دروازه بخورد) و در بهترین وضع از دروازه عبور دهیم، یا از همین فاصله به‌توپ حریف بزنیم؟

۲۷. توپ و تیر استوانه‌ای کراکت

کلفتی تیر کراکت در پایین، برابر ۶ سانتی متر و قطر توپ کراکت ۱۰ سانتی‌متر است. زدن توپ حریف، چند بار ساده‌تر از زدن تیر از همان فاصله است؟

۲۸. از دروازه عبور کنیم یا به‌تیر بزنیم؟

قطر توپ نصف پهنای دروازه و دو برابر کلفتی تیر است. کدام ساده‌تر است: به‌طور آزاد و در بهترین وضع، از دروازه عبور کنیم یا از همین فاصله به‌تیر بزنیم؟

۲۹. از تله عبور کنیم یا توپ حریف را بزنیم؟

پهنای دروازه مستطیل شکل دوبرابر قطر توپ است. کدام ساده‌تر است: به‌طور آزاد، و در بهترین وضع، از تله عبور کنیم یا از همین فاصله به‌توپ حریف بزنیم؟

۳۰. تلهٔ غیرقابل عبور

بین پهنای دروازهٔ مستطیلی و قطر توپ چه بستگی وجود داشته باشد تا عبور از تله ناممکن شود؟

حل تمرین‌های ۱۶ تا ۳۰

۱۶. برای سادگی کار، درآغاز ۷ سنگ جفتیِ دومینو، یعنی ۰ ـ ۰، ۱ ـ ۱، ۲ ـ ۲ و غیره راکنار می‌گذاریم. ۲۱ سنگ می‌ماند که درآن‌ها، هریک از خال‌ها، شش بار تکرار شده است، مثلاً خال ۴ (در نیمی از سنگ‌ها) دراین شش سنگ وجود دارد:

۴ـ۶، ۴ـ۵، ۴ـ۳، ۴ـ۲، ۴ـ۱، ۴ـ۰

به‌این ترتیب، خال‌ها به‌تعداد زوج تکرار شده‌اند. روشن است دراین وضع می‌توان آن‌ها را پشت سرهم طوری قرار داد که خال‌های برابر پهلوی هم قرار گیرند. پس از آن که ۲۱ سنگ را منظم کردیم می‌توانیم هفت سنگ ۰ـ۰، ۱ـ۱ و غیره را درجاهای مناسب بین آن‌ها قرار دهیم. به‌این ترتیب، هر ۲۸ سنگ، با رعایت بازی دومینو، به‌صورت زنجیری دنبال هم قرار می‌گیرند.

۱۷. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد، اگر با ۲۸ سنگ دومینو، زنجیری درست شود، با هرخالی آغاز شده باشد، با همان خال پایان می‌پذیرد. در واقع، اگر این‌طور نباشد، تعداد خال‌های دو سر زنجیر به‌تعداد فرد تکرار می‌شوند (در داخل زنجیر، خال‌های هم‌شماره، کنار هم قرار گرفته‌اند و بنابراین، تعداد خال‌های هم‌شماره، در داخل

زنجیر زوج است)؛ درحالی که می‌دانیم، تعداد خال‌های هم‌شماره، در سنگ‌های دومینو، هشت‌بار تکرار شده است، یعنی تعداد آن‌ها زوج است.

بنابراین، خال‌های دو سر زنجیر نمی‌تواند، هم‌شماره نباشد (این نوع استدلال را در ریاضیات، **برهان خُلف** می‌نامند). از این استدلال، می‌توان نتیجه جالبی گرفت: دو سر زنجیری راکه با ۲۸ سنگ دومینو به‌دست آورده‌ایم، می‌توان به‌هم وصل کرد و یک حلقه به‌دست آورد. بنابراین، با همهٔ سنگ‌های دومینو و با رعایت قاعدهٔ بازی، می‌توان یک زنجیر و یا یک حلقهٔ بسته درست کرد.

ممکن است خواننده به‌این نکته علاقه‌مند باشد که، چند روش مختلف برای ساختن این زنجیر (یا حلقهٔ بسته) وجود دارد؟ بدون این‌که وارد محاسبه‌های مفصل و خسته‌کننده بشویم، یادآوری می‌کنیم، تعداد این روش‌ها بسیار زیاد و بیشتر از ۷ میلیارد است. عدد دقیق آن‌چنین است:

۷۹۵۹۲۲۹۹۳۱۵۲۰

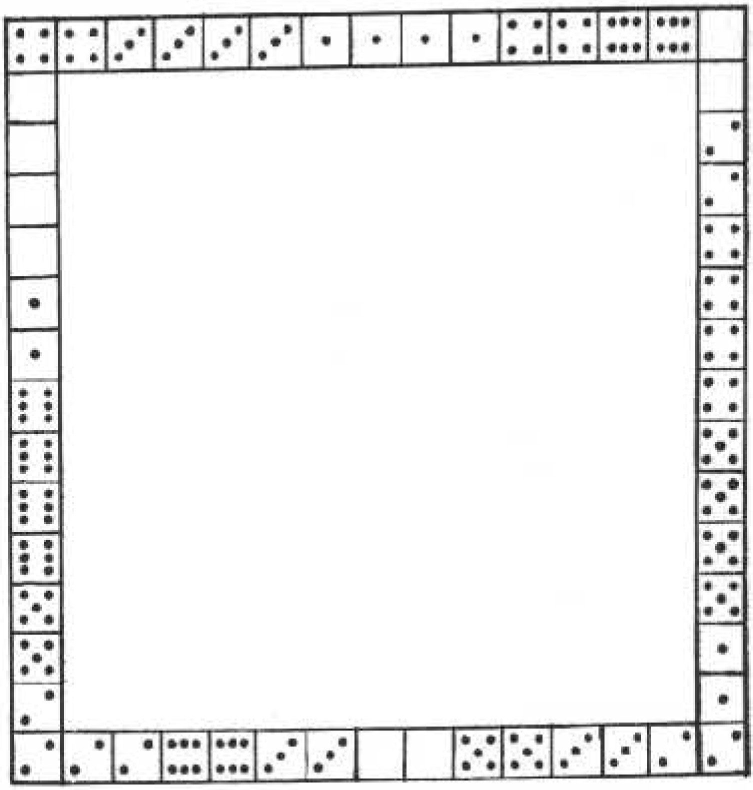
که می‌توان آنرا به‌صورت تجزیه به‌عامل‌های اول، چنین نوشت:

$$۲^{۱۳} \times ۳^{۸} \times ۵ \times ۷ \times ۴۲۳۱$$

۱۸. حل این چیستان را می‌توان ازاین جا نتیجه گرفت که با ۲۸ سنگ دومینو می‌توان یک حلقه ساخت؛ اکنون اگر از این حلقه، یک سنگ راکنار بگذاریم:

۱) ۲۷ سنگ باقی مانده یک زنجیر یا یک حلقهٔ باز را تشکیل می‌دهند؛

۲) خال‌های دو انتهای این زنجیر، همان خال‌های سنگی است که



شکل ۲۰

از آن کنار گذاشته‌ایم.

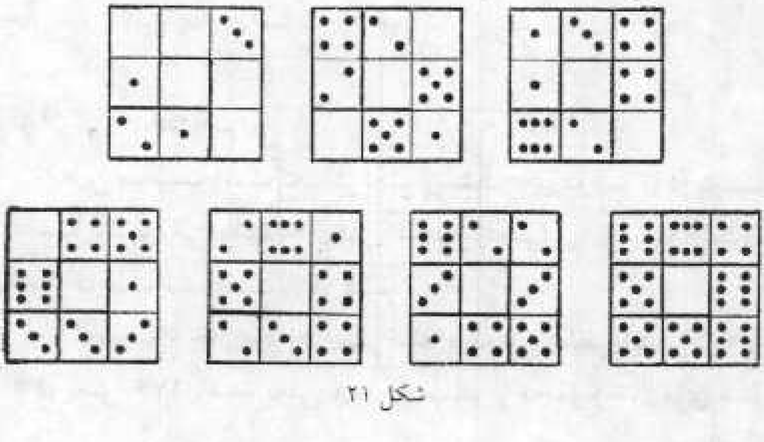
به‌این مناسبت است که، اگر یکی از سنگ‌های دومینو را در دست داشته باشیم، می‌توانیم خال‌های دو سر زنجیری را که با ۲۷ سنگ دیگر درست شده است، پیدا کنیم.

۱۹. مجموع خال‌های هرچهار ضلع مربع مورد نظر باید برابر ۴ × ۴۴، یعنی ۱۷۶ باشد، یعنی ۸ واحد بیشتر از مجموع خال‌های همهٔ

سنگ‌های دومینو (مجموع خال‌های همهٔ سنگ‌های دومینو، برابر ۱۶۸ است). این تعداد زیاد، به‌این مناسبت به‌دست می‌آید که خال‌های مربوط به‌رأس‌های مربع، هرکدام دوبار به‌حساب می‌آیند. از این جا نتیجه می‌شود: مجموع خال‌های چهار رأس مربع، باید برابر ۸ باشد. دانستن این نکته، حل مسأله را ساده‌تر می‌کند، گرچه به‌هرحال برای پیداکردن مربع مورد نظر، هنوز کار کم و بیش پرزحمتی درپیش است. پاسخ در شکل ۲۰ داده شده است.

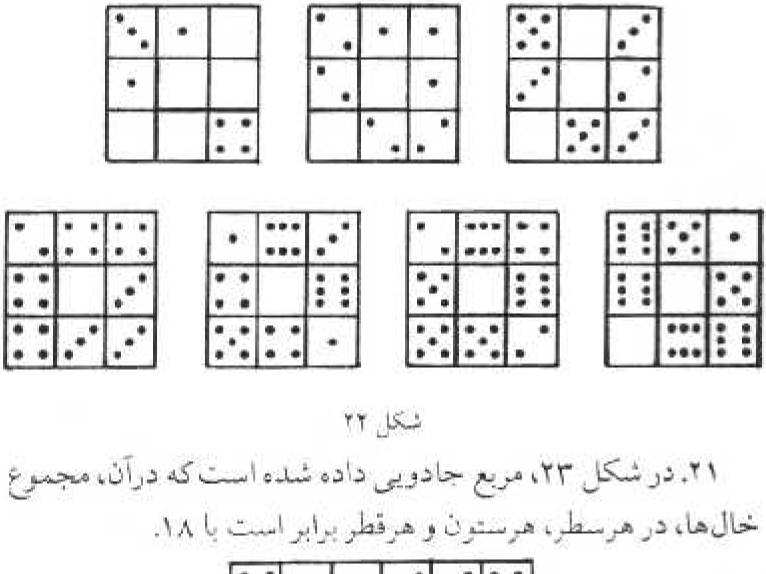
۲۰. از تعداد زیاد پاسخ‌ها، دو پاسخ را می‌آوریم. در پاسخ اول (شکل ۲۱) داریم:

یک مربع که درهر ضلع ۳ خال دارد،
یک مربع که درهر ضلع ۶ خال دارد،
یک مربع که درهر ضلع ۸ خال دارد،
دو مربع که درهر ضلع ۹ خال دارد،
یک مربع که درهر ضلع ۱۰ خال دارد،
یک مربع که درهر ضلع ۱۶ خال دارد،



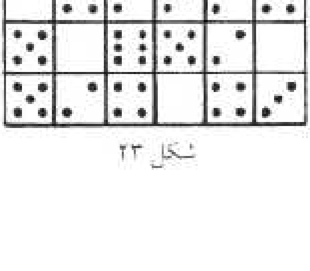
شکل ۲۱

در پاسخ دوم (شکل ۲۲) داریم:
دو مربع که درهر ضلع ۴ خال دارد،
یک مربع که درهر ضلع ۸ خال دارد،
دو مربع که درهر ضلع ۱۰ خال دارد،
دو مربع که درهر ضلع ۱۲ خال دارد،



شکل ۲۲

۲۱. در شکل ۲۳، مربع جادویی داده شده است که درآن، مجموع خال‌ها، در هرسطر، هرستون و هرقطر برابر است با ۱۸.



شکل ۲۳

۲۲. برای نمونه، دو تصاعد با قدر نسبت ۲ می‌آوریم

a) ۰-۰; ۰-۲; ۰-۴; ۰-۶; ۴-۴; (۳-۵ یا)؛ ۵-۵ (۴-۶ یا)؛

b) ۰-۱; ۰-۳; (۱-۲ یا)؛ ۰-۵ (۲-۳)؛ ۱-۶; (۳-۴); ۳-۶ (۴-۵ یا)؛ ۵-۶

با ۶ سنگ دومینو، ۲۳ نوع تصاعد می‌توان درست کرد که سنگ اول هرکدام از آن‌ها چنین است:

الف) برای تصاعد با قدر نسبت ۱:

۰-۰	۱-۱	۲-۱	۲-۲	۳-۲
۰-۱	۲-۰	۳-۰	۳-۱	۲-۴
۱-۰	۰-۳	۰-۴	۱-۴	۳-۵
۰-۲	۱-۲	۱-۳	۲-۳	۳-۴

ب) برای تصاعد با قدر نسبت ۲:

۰-۰ ؛۰-۲ ؛۰-۱

۲۳. این مسأله را می‌توان با ۴۴ حرکت، به‌ترتیب زیر حل کرد:

۱۴،	۱۱،	۱۲،	۸،	۷،	۶،	۱۰،	۱۲،	۸،	۷،
۴،	۳،	۶،	۴،	۷،	۱۴،	۱۱،	۱۵،	۱۳،	۹،
۱۲،	۸،	۴،	۱۰،	۸،	۴،	۱۴،	۱۱،	۱۵،	۱۳،
۹،	۱۲،	۴،	۸،	۵،	۴،	۸،	۹،	۱۳،	۱۴،
۱۰،	۶،	۲،	۱						

۲۴. این مسأله را می‌توان با ۳۹ حرکت حل کرد:

۱۴،	۱۵،	۱۰،	۶،	۷،	۱۱،	۱۵،	۱۰،	۱۳،	۹،
۵،	۱،	۲،	۳،	۴،	۸،	۱۲،	۱۵،	۱۰،	۱۳،
۹،	۵،	۱،	۲،	۳،	۴،	۸،	۱۲،	۱۵،	۱۴،

۱۲ ۸، ۴، ۳، ۲، ۱، ۵، ۹، ۱۳،

۲۵. مربع جادویی با مجموع ۳۰، بعد از این حرکت‌ها به‌دست می‌آید:

۱۵، ۱۳، ۹، ۱۰، ۶، ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۲،

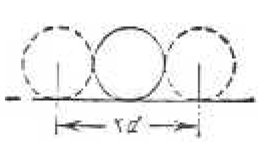
۸، ۱۲، ۱۴، ۹، ۱۰، ۷، ۴، ۸، ۱۲، ۱۴،

۶، ۹، ۱۰، ۳، ۲، ۶، ۹، ۱۰، ۷، ۴،

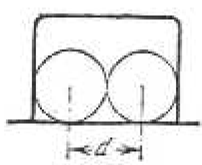
۱۳، ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۳، ۲، ۱، ۵،

۳ ۱۵، ۱۲، ۳، ۱۴، ۱۳، ۱، ۲، ۳، ۱۴،

۲۶. حتا بازی‌کنان پرتجربه، به‌احتمالی می‌گویند، با این شرط‌ها، عبور از دروازه ساده‌تر از زدن توپ حریف است، زیرا پهنای دروازه دو برابر قطر توپ است. ولی این گمان نادرست است: البته پهنای دروازه بیشتر از قطر توپ است، ولی دروازه برای عبور آزاد توپ، دوبار تنگ‌تر از توپ حریف برای هدف‌گیری است. شکل‌های ۲۴ و ۲۵، این مطلب را روشن می‌کنند. مرکز توپ نباید به‌سیم دروازه، بااندازه‌ای کم‌تر از اندازهٔ شعاع نزدک شود، درغیر این‌صورت توپ به‌سیم می‌خورد. بنابراین هدف، برای عبور آزاد، به‌اندازهٔ دو برابر شعاع توپ، از پهنای دروازه کم‌تر است. به‌این ترتیب، برای عبور آزادِ توپ از دروازه، طول هدف برابر قطر توپ می‌شود.



شکل ۲۵



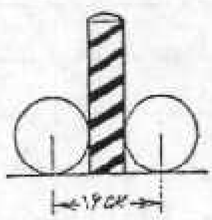
شکل ۲۴

اکنون باید ببینیم طول هدف برای مرکز توپی که حرکت می‌کند، درحالتی که توپ حریف را می‌زند، چقدر است! روشن است، اگر مرکز توپ متحرک به اندازهٔ کم‌تر از شعاع به‌مرکز توپ هدف نزدیک باشد، می‌تواند به‌آن برخورد کند. یعنی طول هدف دراین حالت (همان‌طورکه ازشکل ۲۵ دیده می‌شود) برابراست بادوبرابر قطر توپ.

به‌این ترتیب، با شرط‌های مسأله، هدف‌گیری توپ حریف، ۲ بار ساده‌تر از عبور آزاد از دروازه خواهد بود.

۲۷. با حل مسألهٔ قبل، نیازی به‌بحث زیاد دراین جا نداریم، به‌سادگی دیده می‌شود (شکل ۲۶)، طول هدف برای زدن توپ حریف، دو برابر قطر توپ یعنی برابر ۲۰ سانتی‌متر است؛

شکل ۲۶



شکل ۲۷

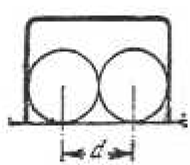
درحالی که طول هدف برای زدن تیر برابر است با مجموع قطر توپ و قطر تیر، یعنی ۱۶ سانتی‌متر (شکل ۲۷). به‌این ترتیب زدن توپ حریف به‌اندازهٔ

$$20 : 16 = 1\frac{1}{4} \text{ (مرتبه)}$$

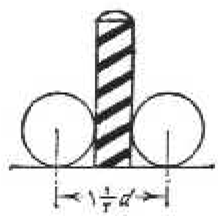
یعنی ۲۵٪ نسبت به‌زدن تیر ساده‌تر است. کسانی هم که درجریان بازی هستند، به‌طور معمول، در مقایسه با زدن تیر، زدن توپ حریف

را ترجیح می‌دهند.

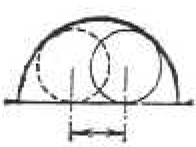
۲۸. برخی این‌طور داوری می‌کنند: پهنای دروازه دو برابر قطر توپ است؛ درحالی که قطر تیر، نصف قطر توپ است. بنابراین هدف برای عبور آزاد از دروازه، ۴ بار بزرگ‌تر از هدف برای زدن تیر است. ولی با توجه به‌دو مسألهٔ قبل، برای خواننده این اشتباه پیش نمی‌آید و متوجه می‌شود، هدف برای زدن به‌تیر $1\frac{1}{2}$ بار، پهن‌تر از هدف برای گذر آزاد از درون دروازه است. این مطلب به‌روشنی در شکل‌های ۲۸ و ۲۹ دیده می‌شود.



شکل ۲۸



شکل ۲۹

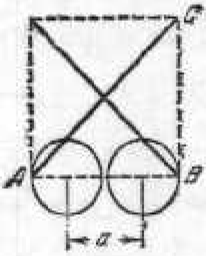


شکل ۳۰

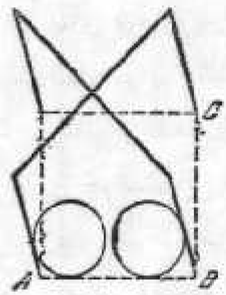
اگر دروازه، به‌جای مستطیل، به‌شکل نیم‌دایره باشد، طول هدف برای عبور از آن، باز هم تنگ‌تر می‌شود (شکل ۳۰).

۲۹. از شکل‌های ۳۱ و ۳۲ معلوم می‌شود، فاصلهٔ a برای عبور مرکز توپ، بنابر شرط‌های مسأله، به‌اندازهٔ کافی تنگ است. کسانی که با هندسه آشنایی دارند، می‌دانند، ضلع AB از مربع، نزدیک به $\frac{1}{4}$ مرتبه از قطر AC کوچک‌تر است.

اگر پهنای دروازه برابر $3d$ باشد (d قطر توپ است)، طول ضلع AB چنین می‌شود:



شکل ۳۲



شکل ۳۱

$$۳d : ۱/۴ \neq ۲/۱d$$

فاصله a هم، که دامنهٔ هدف را برای مرکز توپ معین می‌کند، باز هم تنگ‌تر است. این دامنه به‌اندازهٔ یک قطر توپ کم‌تر است، یعنی برابر است با:

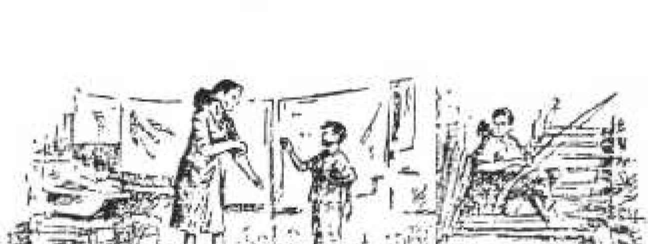
$$۲/۱d - d = ۱/۱d$$

از طرف دیگر می‌دانیم، دامنهٔ هدف برای زدن توپ حریف، برابر $۲d$ است. بنابراین، با شرط‌های مسأله، زدن توپ حریف، نزدیک به‌دو بار ساده‌تر از گذر از تله است.

۳۰. وقتی گذر از تله ناممکن می‌شود که پهنای دروازه کمتر از ۱/۴ برابر قطر توپ باشد. این نتیجه به‌سادگی و از مسأله ۲۹ به‌دست می‌آید. اگر دروازه به‌شکل کمان باشد، گذر از آن باز هم دشوارتر می‌شود.

۳

دوازده سرگرمی



۳۱. طول نخ

/این چیستان از «باری پنی» نویسندهٔ انگلیسی برداشته شده است. /

همان‌طور که مادر دست‌های خود را از طشت رخت‌شویی بیرون می‌آورد، گفت: «بازهم نخ؟ شاید خیال می‌کنی من از نخ درست شده‌ام، یا کارگاه نخ‌ریسی دارم؟ مگر همین دیروز یک گلولهٔ نخ به‌تو ندادم؟ برای چه، این قدر نخ می‌خواهی؟ گلوله نخ را چه کردی؟»

پسرک پاسخ داد: «نخ‌ها را چه کرده‌ام؟ اولاً نیمی از آن را، خودت پس گرفتی ...»

«حالا بامن یک ودو هم می‌کنی؟ خوب؟ لابد لازم داشتم که پس گرفتم: می‌خواستم پاکت‌های لباس را ببندم.»

«نصف بقیه را هم «توم» از من گرفت. می‌خواست در رودخانه ماهی بگیرد.»

«توم برادر تو است و باید همیشه حرف او را گوش کنی.»

«من هم گوش کردم. ولی برای خودم مقدار کمی ماند. تازه نیمی از آن را هم پاپا از من گرفت. می‌خواست با آن بند شلوارش را درست کند، آخر بند شلوار پاپا، بعد از آن حادثه اتومبیل، از بس خندیده بود

پاره شده بود. کار به‌اینجا تمام نشد. $\frac{۲}{۵}$ بقیه را هم خواهرم گرفت که با آن موهاش را درست کند.»

«بسیار خوب بقیه‌اش را چه کردی؟»

«بقیه‌اش؟ تنها ۳۰ سانتی‌متر برای من باقی مانده بود. اکنون من باید با این ۳۰ سانتی‌متر تلفن گوشی درست کنم. مگر می‌شود؟»

حالا می‌توانید بگویید گلولهٔ نخ چند سانتی‌متر بوده است؟

۳۲. جوراب و دست‌کش

در یک کشو میز، ۱۰ جفت جوراب قهوه ای و ۱۰ جفت جوراب مشکی گذاشته شده و درکشو دیگر، ۱۰ جفت دست‌کش قهوه‌ای و ۱۰ جفت دست‌کش مشکی گذاشته شده است. از هرکشو چند عدد دست‌کش و چند عدد جوراب برداریم تا مطمئن شویم که یک جفت جوراب و یک جفت دست‌کش (قهوه‌ای یا سیاه) خواهیم داشت؟

۳۳. عمر مو

می‌دانید، به‌طور متوسط سر آدم چند مو دارد؟ به‌تقریب ۱۵۰ هزار عدد. هم‌چنین معلوم کرده‌اند، به‌طور متوسط، هرماه ۳ هزار مو می ریزد[۱]. به‌این ترتیب حساب کنید، هرمو، به‌طور متوسط چقدر عمر می‌کند؟

---

۱. ممکن است فکر کنید، تعداد موها را از کجا آورده‌اند: آیا موها را یکی‌یکی شمرده‌اند؟ نه! این‌کار را نکرده‌اند، تنها تعداد موهایی را که در یک سانتی‌متر مربع وجود دارد، شمرده‌اند. دراین‌صورت وقتی سطح پوستی که شامل موها است، معلوم باشد، می‌توان تعداد کل موها را حساب کرد. به‌طور خلاصه، تعداد موهای سر را، شبیه تعداد درختان یک جنگل، می‌شمارند.

۳۴. مزد کار

میزان ماهیانهٔ من به‌اضافه دستمزد اضافه کار من، روی هم ۲۵۰۰ تومان است. اگر میزان ماهیانهٔ من ۲۰۰۰ تومان بیشتر از دستمزد اضافه‌کار من باشد، ماهیانه چقدر حقوق می‌گیرم؟

۳۵. اسکی‌باز

اسکی‌باز حساب کرد اگر با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت حرکت کند، ۱ ساعت بعدازظهر به‌مقصد می‌رسد.

شکل ۳۳. با چه سرعتی حرکت کند؟

ولی اگر ۱۵ کیلومتر در ساعت سرعت داشته باشد، ۱ ساعت قبل از ظهر به‌همان جا می‌رسد. با چه سرعتی حرکت کند تا درست ۱۲ ظهر به‌مقصد برسد؟

۳۶. دو کارگر

دو کارگر یکی پیر و دیگری جوان دریک ساختمان زندگی و در

یک کارخانه کار می‌کنند. کارگر جوان، از منزل تا کارخانه را در ۲۰ دقیقه می‌پیماید و کارگر پیر در ۳۰ دقیقه. اگر کارگر پیر ۵ دقیقه زودتر حرکت کرده باشد،کارگر جوان پس از چند دقیقه به‌او می‌رسد؟

۳۷. رونوشت سند

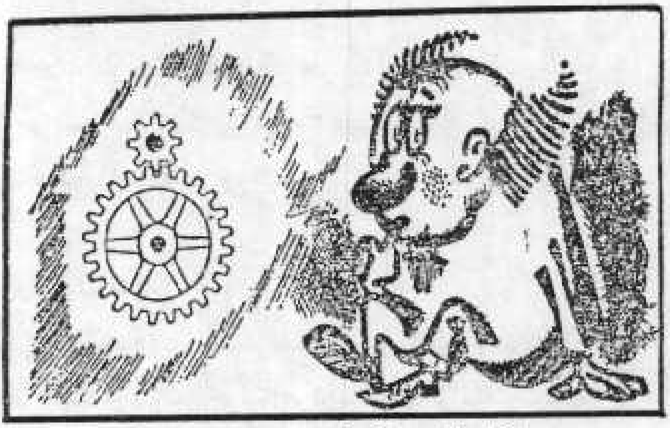
برای نسخه‌برداری از یک سند، به‌دو ماشین‌نویس مراجعه کردند. یکی از آن‌ها، که درکار خود ماهرتر بود، می‌توانست تمام‌کار را در دو ساعت انجام دهد. ولی برای دیگری، که تجربهٔ کمتری داشت، سه ساعت وقت لازم بود.

اگر هردو ماشین‌نویس با هم کار کنند، پس از چه مدت رونوشت سند را آماده خواهند کرد؟ مسأله‌هایی از این قبیل را به‌طور معمول از روی نمونه معروف خود (مسأله دربارهٔ حوض) حل می‌کنند. مثلاً درباره مسألهٔ ما، ابتدا باید دید، هریک از ماشین‌نویس‌ها دریک ساعت، چه کسری ازکار را انجام می‌دهند، سپس مجموع دو کسر را حساب کرده و با تقسیم واحد برحاصل جمع پاسخ را به‌دست می‌آورند. آیا می‌توانید راهی به‌جز راه معمولی برای حل این گونه مسأله‌ها پیدا کنید؟

۳۸. دو چرخ دنده

چرخ دندهٔ کوچکی که ۸ دندانه دارد، به‌چرخ دندهٔ بزرگتری که ۳۲ دندانه دارد، وصل است (شکل ۳۴). وقتی چرخ بزرگ‌تر دور محور خود می‌چرخد، چرخ کوچک‌تر آن را دور می‌زند.

اکنون حساب کنید، در مدتی که چرخ دندهٔ بزرگ‌تر یک دور کامل



شکل ۳۴. چرخ کوچک‌تر چند دور می‌چرخد؟

دور محور خود می‌چرخد، چرخ کوچک‌تر، چند مرتبه دور محور خود خواهد چرخید؟

۳۹. چند سال

از کسی که به‌طرح چیستان علاقه‌مند بود پرسیدند «چند سال داری؟» پاسخ داد: «سه برابر سن سه‌سال قبل مرا از سه برابر سن سه‌سال بعد من کم کنید، سن من به‌دست خواهد آمد.»

اکنون بگویید سن او چقدر است؟

۴۰. سن ایوانوف‌ها

«ایوانوف چند سال دارد؟»

«اگر اجازه بدهید، حساب می‌کنم. ۱۸ سال قبل، به‌اندازهٔ دو برابر سن همسرش از او بزرگ‌تر بود.»

«ولی آن‌طور که من می‌دانم او حالا درست دو برابر همسرش سن

دارد. آیا این زن دوم او است؟»

«نه! ایوانوف یک زن بیشتر نداشت و بنابراین می‌توانی به‌سادگی سن او و همسرش را پیدا کنی.»

۴۱. بازی

وقتی من و دوستم بازی را آغاز کردیم، پول‌های ما برابر بود. دور اول بازی من ۲۰ ریال بردم و دور دوم بازی، $\frac{۲}{۳}$ آن‌چه داشتم باختم. درنتیجه، پولی که برایم باقی ماند، درست $\frac{۱}{۴}$ پول دوستم بود.

پیش از بازی، هریک از ما چقدر پول داشتیم؟

۴۲. خرید

وقتی می‌خواستم برای خرید بیرون بروم، به‌تقریب ۱۵۰۰ تومان پول داشتم که همهٔ آن‌ها ۱۰۰ تومانی و ۲۰ تومانی بود. پس از خرید، همان تعدادی که در آغاز ۱۰۰ تومانی داشتم، ۲۰ تومانی برایم باقی ماند و به‌تعداد ۲۰ تومانی‌هایی که ابتدا داشتم، ۱۰۰ تومانی برایم باقی ماند. ولی جمع پولی که برگردانده‌ام، ثلث پول نخستین من است.

ببینید درآغاز، در کیف من چقدر پول بوده است؟

حل سرگرمی‌های ۳۱ تا ۴۲

۳۱. بعد از آن که مادر نصف نخ‌ها را گرفت، $\frac{1}{2}$ آن باقی ماند و پس از آن که نصف این $\frac{1}{2}$ را به‌برادر بزرگ‌ترش داد، $\frac{1}{4}$ نخ‌ها برایش باقی ماند. بعد از دادن مقداری نخ به‌پدر، $\frac{1}{8}$ و بعد از خواهرش $\frac{3}{5} \times \frac{1}{8}$، یعنی $\frac{3}{40}$ و چون ۳۰ سانتی‌متر برایش مانده است، بنابراین تمام نخ $\frac{40}{3} \times 30$، یعنی ۴۰۰ سانتی‌متر بوده است.

۳۲. کافی است ۳ عدد جوراب انتخاب کنیم که دراین صورت بی‌شک ۲ تای آن‌ها هم رنگ خواهند بود. ولی دربارهٔ دست‌کش‌ها، به‌این سادگی نیست، زیرا دست‌کش‌ها تنها از جهت رنگ با هم فرق ندارند، بلکه به‌جز آن، نیمی از آن‌ها مربوط به‌دست راست و نیم‌دیگر مربوط به‌دست چپ است. دراین‌جا باید ۲۱ عدد دست‌کش انتخاب کرد، زیرا اگر کم‌تر از این تعداد، و مثلاً ۲۰ عدد، انتخاب شود، ممکن است همهٔ آن‌ها مربوط به‌یک دست باشد (۱۰ عدد دست‌کش چپ قهوه‌ای و ۱۰ عدد دست‌کش چپ مشکی).

۳۳. روشن است مویی که از همه جوان‌تر است (یعنی مویی که بیش از یک روز از عمرش نمی‌گذرد) دیرتر از همهٔ موها می‌ریزد.

اکنون ببینیم پس از چه مدتی نوبت ریختن این مو می‌شود؟ ماه اول از تمام این ۱۵۰۰۰۰ مو که هم‌اکنون روی سر وجود دارد، ۳۰۰۰ عدد خواهد ریخت. در دو ماه اول ۶۰۰۰ و در طول سال اول، ۱۲ برابر ۳۰۰۰، یعنی ۳۶۰۰۰. بنابراین،کمی بیشتراز ۴ سال طول می‌کشد تا آخرین مویی که هم‌اکنون دربین موهای سر هست، بریزد. به‌این ترتیب روشن می‌شود، سن میانگین مو، اندکی بیشتر از ۴ سال است.

۳۴. بسیاری بدون فکر پاسخ می‌دهند: ۲۰۰۰ تومان. ولی روشن است که این پاسخ درست نیست، زیرا دراین صورت، اختلاف بین حقوق ماهیانه و دستمزد اضافه‌کار، ۱۵۰۰۰ تومان می‌شود. نه ۲۰۰۰ تومان.

مسأله را باید به‌این ترتیب حل کرد. می‌دانیم، اگر به‌دستمزد اضافه‌کار ۲۰۰۰ تومان بیفزاییم، حقوق ماهیانه به‌دست می‌آید، بنابراین، اگر به ۲۵۰۰ تومان، ۲۰۰۰ تومان را بیفزاییم، ۲ برابر حقوق ماهیانه به‌دست می‌آید:

۲۰۰۰ + ۲۵۰۰ ۴۵۰۰

در نتیجه حقوق ماهیانه، بدون دستمزد اضافه‌کار، برابر ۲۲۵۰ تومان و دستمزد اضافه‌کار ۲۵۰ تومان می‌شود.

۳۵. این مسأله، از دو جهت جالب است: اول، ممکن است این‌طور به‌نظر رسد که سرعت مورد نظر، میانگین بین ۱۰ کیلومتر و ۱۵ کیلومتر (یعنی ۱۲/۵ کیلومتر) در ساعت است. ولی به‌سادگی می‌توان روشن کرد، این پاسخ درست نیست. در واقع، اگر طول راه را a کیلومتر فرض کنیم، وقتی سرعت برابر ۱۵ کیلومتر در ساعت است، به‌اندازهٔ $\frac{a}{۱۵}$ و وقتی سرعت برابر ۱۰ کیلومتر در ساعت است، به‌اندازه $\frac{a}{۱۰}$ ساعت طول خواهد کشید. اکنون اگر سرعت میانگین، یعنی ۱۲/۵ کیلومتر در ساعت را به‌حساب آوریم، $\frac{a}{۱۲/۵}$ یعنی $\frac{۲a}{۲۵}$ ساعت طول می‌کشد. بنابراین باید برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{۲a}{۲۵}-\frac{a}{۱۵}=\frac{a}{۱۰}-\frac{۲a}{۲۵}$$

زیرا هریک از این تفاضل‌ها، برابر یک ساعت است. اگر دو طرف برابری را به a کوچک کنیم:

$$\frac{۲}{۲۵}-\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۲}{۲۵}$$

و یا،

$$\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۴}{۲۵}$$

و این برابری، درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}$ برابر $\frac{۱}{۶}$ یعنی $\frac{۴}{۲۴}$ می‌شود، نه $\frac{۴}{۲۵}$.

ویژگی دوم این مسأله دراین است که، برای حل آن، به‌هیچ معادله‌ای نیاز نداریم و تنها می‌توانیم با توضیح شفاهی آن را به‌نتیجه برسانیم.

اگر اسکی باز با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت، دو ساعت بیشتر حرکت کند (یعنی به‌اندازهٔ تعداد ساعت‌هایی که با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت به‌مقصد می‌رسد)، روشن است که ۳۰ کیلومتر بیشتر خواهد رفت. ولی نسبت به‌سرعت ۱۰ کیلومتر، ۵کیلومتر جلو می‌افتد و بنابراین باید ۶ ساعت (۵ : ۳۰) طول بکشد تا به‌اندازهٔ ۳۰ کیلومتر جلو بیفتد، دراین‌صورت، زمان لازم برای رسیدن به‌مقصد با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت برابر ۲ - ۶ یعنی ۴ ساعت خواهد بود و از آن‌جا طول راه برابر با ۶۰ کیلومتر (۴ × ۱۵)، خواهد شد. اکنون به‌سادگی می‌توان حساب کرد، اسکی باز با چه سرعتی حرکت کند تا ظهر (یعنی بعد از ۵ ساعت) به‌مقصد برسد:

(کیلومتر) ۱۲ = ۵ : ۶۰

و آزمایش هم درستی این نتیجه را تایید می‌کند.

۳۶. مسأله را با روشی غیر از روش استفاده از معادله‌ها حل می‌کنیم:

راه‌حل اول.

کارگر جوان در ۵ دقیقه، $\frac{1}{4}$ راه و کارگر پیر $\frac{1}{6}$ راه را (یعنی $\frac{1}{12}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$ کمتر از کارگر جوان) می‌پیماید. از آن‌جا که کارگر پیر به‌اندازهٔ $\frac{1}{6}$ راه، جلوتر از کارگر جوان است بنابراین کارگر جوان بعد از

$$\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=2$$

برابر ۵ دقیقه، یعنی بعد از ۱۰ دقیقه به‌او خواهد رسید.

راه‌حل دوم.

این راه حل ساده‌تر است: کارگر پیر همهٔ مسیر را ۱۰ دقیقه دیرتر از کارگر جوان می‌پیماید و اگر کارگر پیر، ۱۰ دقیقه زودتر از کارگر جوان، راه بیفتد، با هم به‌کارخانه می‌رسند. ولی اکنون که تنها ۵ دقیقه زودتر به‌راه افتاده است، کارگر جوان درست درمیان راه، یعنی بعد از ۱۰ دقیقه به‌او خواهد رسید (چون کارگر جوان همه راه را در ۲۰ دقیقه می‌پیماید).

۳۷. راه حل غیرعادی این مسأله چنین است: قبل از همه باید به‌این پرسش پاسخ داد که ماشین‌نویس‌ها، کار را چگونه بین خود تقسیم کنند تا آن را با هم به‌پایان برسانند؟ (زیرا تنها دراین‌صورت است که کار درکم‌ترین زمان ممکن، به‌پایان می‌رسد.) از آن‌جا که سرعت کار ماشین‌نویس ماهرتر، یک برابر و نیم سرعت کار ماشین‌نویس دوم است، بنابراین باید سهم کار او یک برابر و نیم سهم دومی باشد تا کار را با هم و در یک زمان تمام کنند. به‌این ترتیب، اولی $\frac{3}{5}$ و دومی $\frac{2}{5}$ کار را باید انجام دهند.

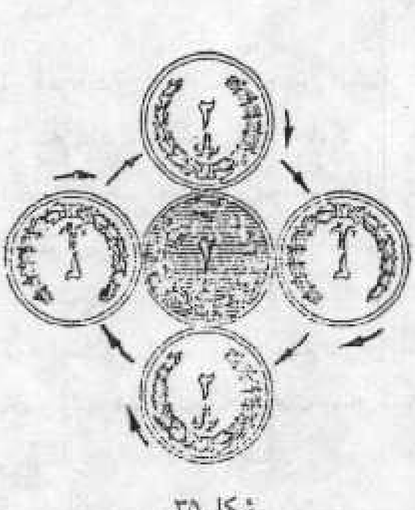
اکنون دیگر مسأله کم و بیش، حل شده است. در واقع، باید دید

ماشین‌نویس اول $\frac{۳}{۵}$ سند را در چه مدتی ماشین خواهد کرد. می‌دانیم، همهٔ سند را در دو ساعت ماشین می‌کند و، بنابراین، $\frac{۳}{۵}$ آن را در $\frac{۳}{۵} \times ۲$ یعنی $۱\frac{۱}{۵}$ ساعت تمام می‌کند. درهمین مدت هم، ماشین‌نویس دوم سهم کار خود را به‌پایان می‌رساند.

به‌این ترتیب، کم‌ترین زمانی که برای رونویس‌کردن این سند به‌وسیلهٔ این دو ماشین‌نویس لازم است، ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه می‌باشد.

۳۸. اگر گمان می‌کنید چرخ کوچک، ۳ مرتبه دور محور خودش می‌چرخد، اشتباه می‌کنید. زیرا پاسخ، نه ۳ مرتبه، بلکه ۴ مرتبه است.

برای این که مطلب برای شما روشن شود، روی صفحهٔ میز دو سکهٔ برابر و مثلاً ۲ ریالی (شبیه شکل ۳۵) قرار دهید. با یک دست سکهٔ پایینی را بگیرید و با دست دیگر سکه دوم را، شبیه شکل، دور آن بچرخانید. خواهید دید، وقتی سکهٔ دوم درست پایین سکهٔ اول



شکل ۳۵

برسد، یک دور کامل دور خودش چرخیده است و شما، این مطلب را، از روی وضع عددی که روی سکه نوشته شده است، می‌توانید بفهمید. بنابراین، درحالتی که ۲ سکه برابر هستند، اگر یکی متکی به‌دیگری دور آن بچرخد، دور مرکز خودش، ۲ بار (و نه یک‌بار) خواهد چرخید.

به‌طور کلی، وقتی جسمی، هم دور خودش و هم دور پیرامون یک دایره می‌چرخد، تعداد گردش‌های به‌دور خودش یک بار بیشتر از آن است که به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید. به‌همین دلیل است که کرهٔ زمین هم، وقتی یک دور کامل دور خورشید می‌چرخد، دور محور خودش، به‌جای ۳۶۵ دور و $\frac{۱}{۴}$، ۳۶۶ دور و $\frac{۱}{۴}$ می‌چرخد (البته، به‌شرطی که این گردش را نسبت به‌خورشید حساب نکنیم، بلکه نسبت به‌ستارهٔ ثابتی در نظر بگیریم). اکنون شما می‌فهمید، چرا شبانه روز ستارگان، کوتاه‌تر از شبانه روز خورشید است.

۳۹. حل مسأله از راه حساب، به‌اندازهٔ کافی پیچیده است. ولی اگر از جبر و حل معادله یاری بگیریم، به‌اندازه کافی ساده می‌شود. اگر سن مورد جست و جو را x فرض کنیم، داریم:

$$۳(x + ۳) - ۳(x - ۳) = x$$

که از آن‌جا، با حل این معادلهٔ ساده، به‌دست می‌آید: $x = ۱۸$ یعنی مرد علاقه‌مند به‌چیستان اکنون ۱۸ سال دارد.

۴۰. این مسأله را هم، شبیه مسأله قبل، با کمک یک معادلهٔ ساده حل می‌کنیم: ۱۸ سال پیش، هرکدام از آن‌ها، ۱۸ سال کوچک‌تر بودند: شوهر $۲x - ۱۸$ و زن $x - ۱۸$ چون درآن زمان، شوهر دوبرابر سن همسرش از او بزرگ‌تر بود، بنابراین داریم:

$$۲x - ۱۸ = ۳(x - ۱۸)$$

و با حل این معادله ساده به‌دست می‌آید $x = ۳۶$

یعنی اکنون، زن ۳۶ سال و مرد ۷۲ سال دارد.

۴۱. فرض کنیم پیش از آغاز بازی، هرکدام x تومان داشته‌اند، پس از دور اول، بازی‌کن اول $x + ۲۰$ و بازی‌کن دوم $x - ۲۰$ تومان خواهند داشت. پس از دور دوم بازی، نفر اول $\frac{۲}{۳}$ پول خود را باخت و بنابراین باقی‌ماندهٔ پول او $\frac{۱}{۳}(x + ۲۰)$ تومان می‌شود. درهمین موقع دومی که $x - ۲۰$ تومان داشت $\frac{۲}{۳}(x + ۲۰)$ می‌برد و بنابراین، جمع پول او چنین می‌شود:

$$x - ۲۰ + \frac{۲}{۳}(x + ۲۰) = \frac{۵x - ۲۰}{۳}$$

و چون دراین موقع، پول اولی برابر $\frac{۱}{۴}$ پول دومی است، باید داشته باشیم

$$\frac{۴}{۳}(x + ۲۰) = \frac{۵x - ۲۰}{۳}$$

و از آن‌جا $x = ۱۰۰$ یعنی پیش از آغاز بازی، هرکدام ۱۰۰ تومان داشته‌اند.

۴۲. تعداد اسکناس‌های ۱۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس‌های ۲۰ تومانی را y فرض می‌کنیم. بنابراین، وقتی برای خرید بیرون می‌رفتم، درکیف

$(۱۰۰x + ۲۰y)$ تومان

پول داشتم. پس از خرید، وقتی به‌منزل برمی‌گشتم، پول من برابر

$(۱۰۰y + ۲۰x)$ تومان

می‌شود. ولی چون پولی که برگردانده‌ام، یک‌سوم پولی است که در آغاز درکیف خود داشتم، باید برابری زیر برقرار باشد:

$$۳(۱۰۰y + ۲۰x) = ۱۰۰x + ۲۰y$$

که با ساده کردن آن، به‌دست می‌آید:

$$x = ۷y$$

اگر $y = ۱$ به‌دست می‌آید $x = ۷$ و، دراین صورت، پول نخستین من برابر ۷۲۰ تومان می‌شود که با شرط مسأله جور در نمی‌آید (بنابر شرط مسأله، پول نخستین من، در حدود ۱۵۰۰ تومان بوده است).

اگر $y = ۲$، $x = ۱۴$ و دراین صورت، پول نخستین برابر ۱۴۴۰ تومان می‌شود که با شرط مسأله می‌سازد.

اگر $y = ۳$، $x = ۲۱$ ولی دراین صورت باید پول نخستین برابر ۲۱۶۰ تومان باشد که بازهم با شرط مسأله سازگار نیست.

بنابراین مسأله تنها یک پاسخ دارد: ۱۴۴۰ تومان؛ و پس از خرید دو اسکناس ۱۰۰ تومانی و ۱۴ اسکناس ۲۰ تومانی، یعنی ۴۸۰ تومان باقی مانده است که $\frac{۱}{۳}$ پول نخستین است:

$$۱۴۴۰ : ۳ = ۴۸۰$$

تفاوت این دو مبلغ یعنی

$$۱۴۴۰ - ۴۸۰ = ۹۶۰ \text{ (تومان)}$$

برای خرید مصرف شده است.

۴

آیا می‌توانید بشمارید؟

۴۳. آیا می‌توانید بشمارید؟

این پرسش را از همه کسانی که بیش از سه سال از سن آن‌ها گذشته است، می‌توان کرد. چه کسی نمی‌تواند بشمارد؟ اگر هدف شمردن عددهای پشت‌سرهم «یک»، «دو»، «سه» و غیره باشد، هنر زیادی لازم ندارد. ولی اطمینان دارم، شما همیشه نمی‌توانید کار شمردن را به‌سادگی به‌پایان برسانید. همه‌چیز بستگی به‌این دارد که، چه چیزهایی را باید شمرد! شمردن میخ‌هایی که در یک جعبه است، دشوار نیست؛ ولی فرض کنید در جعبه، میخ و پیچ روی هم ریخته شده باشد و شما بخواهید تعداد هریک را به‌طور جداگانه بدانید. چگونه عمل می‌کنید؟ آیا در آغاز میخ‌ها و پیچ‌ها را از هم جدا می‌کنید و، سپس، هردسته را می‌شمارید؟

در برابر زن خانه‌دار هم، وقتی می‌خواهد لباس‌های شسته را از هم جدا کند، همین مسأله مطرح است. او اول لباس‌ها را، برحسب نوع آن‌ها، از هم جدا می‌کند: پیراهن را یک جا می‌گذارد، حوله و یا ملافه‌ها را در طرف دیگر و غیره. بعد، هردسته را به‌طور جداگانه می‌شمارد، تا تعداد آن‌ها را کنترل کند. اگر شما هم، چیزها را به‌همین صورت می‌شمارید، باید گفت شمردن بلد نیستید! زیرا این روش

شمردن چیزهای مختلف، هم دشوار است و هم زمان زیادی می‌برد. از طرف دیگر، وقتی شما بخواهید، میخ‌ها یا لباس‌ها را بشمارید، می‌توانید آن‌ها را به‌سادگی به‌دسته‌های جداگانه تقسیم کنید، ولی جنگل‌بانی را در نظر بگیرید که می‌خواهد بداند در یک هکتار، چند درخت سرو، چند درخت کاج، چند درخت چنار و چند درخت سپیدار رویـیده است؛ روشن است که دراین حالت، نمی‌توان درخت‌ها را برحسب نوع آن‌ها از هم جدا کرد و در بسته‌های جداگانه‌ای قرار داد. آیا باید یک‌بار همهٔ درخت‌های سرو را شمرد؛ سپس درخت‌های کاج، بعد درخت‌های چنار و، برای بار چهارم، درخت‌های سپیدار را؟ یعنی چهار مرتبه تمام این بخش جنگل را چرخید؟

آیا نمی‌توان راهی پیدا کرد که بتوان، برای یک‌بار همهٔ درخت‌ها را شمرد و تعداد هریک رابه‌دست آورد؟ چرا! چنین راهی وجود دارد و مدت‌ها است که جنگل‌بانان از آن استفاده می‌کنند. برای این‌که این راه را نشان دهیم، به‌همان نمونهٔ شمارش میخ‌ها و پیچ‌ها بر می‌گردیم.

برای این‌که تعداد میخ‌ها و پیچ‌های یک جعبه را، بدون جداکردن از یکدیگر، معین کنیم، مداد و کاغذی برمی‌داریم و روی صفحهٔ کاغذ، جدول کوچکی مانند شکل زیر می‌کشیم.

میخ	پیچ

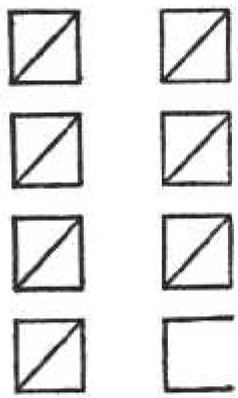
سپس، آغاز به‌شمردن می‌کنیم. از جعبه یکی برمی‌داریم، هرچه

به‌دستمان بیاید. اگر میخ بود روی صفحه کاغذ و در ستون میخ نشانه‌ای می‌گذاریم و اگر پیچ بود، نشانه را در ستون پیچ قرار می‌دهیم. بعد دومی را برمی‌داریم و به‌همین ترتیب عمل می‌کنیم، دومی، سومی، چهارمی، ... تا وقتی جعبه خالی شود. درنتیجه در ستون میخ، تعداد میخ‌ها و در ستون پیچ، تعداد پیچ‌های جعبه معین می‌شود. یعنی باید نشانه‌هایی را که روی صفحه کاغذ در هرستون گذاشته‌ایم، بشماریم.

برای این‌که شمارش نشانه‌ها ساده و تند انجام گیرد، می‌توان هر ۵ نشانه را، مثلاً شبیه شکل ۳۶، پهلوی هم قرار داد.

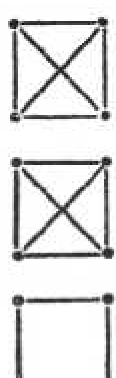
شکل ۳۶. می‌توان هرپنج نشانه را با هم قرار داد.

هم‌چنین بهتر است، هردو مربع را پهلوی هم قرار دهیم، به‌این معنی که وقتی تعداد نشانه‌ها به ۱۰ رسید، دو مربع کامل می‌شوند. برای نشانهٔ یازدهم به‌سطر بعدی می‌رویم و، به‌این ترتیب، در هر سطر ۱۰ نشانه خواهیم داشت. بنابراین، نشانه‌ها شبیه شکل ۳۷ منظم می‌شوند. دراین‌صورت شمردن نشانه‌ها بسیار ساده است و شما بلافاصله می‌بینید، درآن‌جا سه ردیف ۱۰ نشانه‌ای، یک مربع ۵ نشانه‌ای و سه نشانهٔ تنها وجود دارد و، بنابراین، مجموع آن‌ها برابر ۳۸ می‌شود.



شکل ۳۷. نتیجهٔ شمردن را به‌این ترتیب منظم می‌کنیم.

می‌توان نشانه‌ها را به‌گونه‌های دیگری هم مرتب کرد. مثلاً می‌توان، شبیه آن چه‌در شکل ۳۸ می‌بینید، هر ده علامت را در یک مربع جای داد.



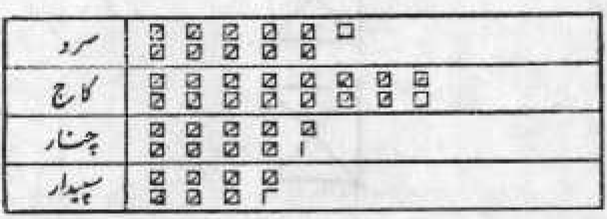
شکل ۳۸. هر مربع نماینده ۱۰ نشانه است.

برای شمردن درخت‌های گوناگون جنگل هم می‌توان از همین روش، استفاده کرد. تنها دراین‌جا، روی صفحه کاغذ به‌جای دو ستون، چهار ستون خواهیم داشت. حتا بهتر است دراین‌حالت به‌جای جدول عمودی، یک جدول‌افقی تنظیم کنیم، شبیه شکل ۳۹.

	سرو
	کاج
	چنار
	سپیدار

شکل ۳۹. جدولی برای شمردن درخت‌های جنگل

در پایان کار شمارش درخت‌ها، جدول شکل ۳۹ به‌گونه‌ای شبیه شکل ۴۰ درخواهد آمد:



شکل ۴۰. وضع جدول بعد از شمردن درخت‌ها

که از روی آن می‌توان به‌سادگی تعداد هرنوع درخت را معین کرد:

سرو: ۵۳ چنار: ۴۶

کاج: ۷۹ سپیدار: ۳۷

پزشکی هم که می‌خواهد تعداد گلبول‌های سفید و قرمز یک قطره خون را بشمارد، می‌تواند از همین روش استفاده کند.

هم‌چنین، اگر بخواهید تعداد گونه‌های مختلف گیاهانی را که در یک کشت‌زار کوچک روییده است، معین کنید، می‌توانید با همین روش، کار را به‌تندی و درستی به‌پایان برسانید. در این مورد روی صفحهٔ کاغذ، جدولی تنظیم می‌کنید و نام گیاهانی را که از وجودشان آگاهی دارید، درآن ثبت می‌کنید و چند جای خالی هم برای گیاهانی که نتوانسته‌اید حدس بزنید، نگه می‌دارید و سپس درکشت‌زار به‌راه می‌افتید و شماره کردن را آغاز می‌کنید.

برای تعیین گونه‌ها و تعداد درخت‌های یک جنگل هم می‌توان به‌همین ترتیب عمل کرد.

۴۴. برای چه درختان جنگل را می‌شمارند؟

به‌چه منظور، درختان جنگل را می‌شمارند، این‌کار چه سودی دارد؟ مردم شهر حتی این‌کار را ناممکن می‌پندارند. در رمان **تولستوی**، به‌نام **آناکارنینا**، «لوین» که با اقتصاد روستایی آشنایی دارد، از یکی از خویشان خود، که دراین زمینه ناآگاه است و می‌خواهد جنگلش را بفروشد، می‌پرسد: «آیا درخت‌ها را شمرده‌اید؟»

ولی او با شگفتی پاسخ می‌دهد: «چه‌طور، مگر می‌شود درختان را شمرد؟ برای شمردن شن‌ها و ستارگان، به‌خرد زیادی نیاز داریم ...»

بله! و این خرد زیاد را «ریابینا» (خریدار) دارد؛ یک دهقان هم پیدا نمی‌شود، چیزی را بدون شمردن بخرد.

درختان جنگل را، به‌این دلیل می‌شمارند که ببینند درآن چند متر مکعب چوب وجود دارد. البته کسی همهٔ درخت‌های جنگل را نمی‌شمارد، بلکه تکه‌ای به‌وسعت یک‌چهارم و یا نیم هکتار از جنگل را بر می‌گزینند، به‌نحوی که موقعیت درختان آن، چه از نظر انبوهی درخت و چه از نظر بزرگی و ضخامت آن‌ها، میانگینی از موقعیت جنگل باشد. برای انتخاب چنین تکه‌ای از جنگل باید «دید تجربی» داشت و در واقع، کسی باید این انتخاب را بکند که با مجموعهٔ جنگل آشنایی داشته باشد. در تکهٔ انتخاب شده، تنها شمردن درخت‌ها کافی نیست، باید آن‌ها را برحسب کلفتی تنهٔ آن‌ها تقسیم‌بندی کرد: چند درخت با ضخامت ۲۵ سانتی‌متر، چند درخت با ضخامت ۳۰ سانتی‌متر و یا ۳۵ سانتی‌متر و غیره وجود دارد؟ دراین‌صورت، آن‌طور که در مثال نمونه‌ای ما مطرح بود، تنها چهارنوع درخت نخواهیم داشت، بلکه گونه‌های خیلی بیشتری باید درنظر گرفته شود. اکنون شما می‌توانید تصور کنید، اگر درخت‌ها را با روشی که گفتیم شماره نکنیم، چند بار باید همهٔ تکه نمونه‌ای جنگل را بچرخیم تا بتوانیم تعداد همهٔ گونه‌های درختان آن را یادداشت کنیم؟

۵

سرگرمی با عدد

۴۵. هزار تومان به‌پانصد تومان

یک طراح چیستان‌های عددی، روی صحنه آمد و به‌جمعیتی که با اشتیاق متوجه او بود، پیشنهادکرد: «ده هزار تومان» به کسی می دهم که پنج‌هزار ریال به‌من بدهد، به‌شرطی که همهٔ پنج هزار ریال از اسکناس‌های ۵۰۰ ریالی، ۲۰۰ ریالی و ۵۰ ریالی باشد و روی هم بیست عدد بشود. ده هزار تومان به‌پانصد تومان! چه کسی حاضر است؟» همه‌جا را سکوت فرا گرفت. همه مشغول بودند: مداد و دفتر یادداشت را از جیب بیرون آورده بودند و محاسبه می‌کردند. ولی کسی پاسخ پیشنهاد را نداد.

«مثل این که ارزش ده هزار تومان را زیاد معین کرده‌ام. شاید ده‌هزار تومان به‌پانصد تومان نمی‌ارزد. اجازه بدهید ارزش را دویست تومان پایین بیاورم: ده‌هزار تومان به‌سیصد تومان. البته با همان شرط‌های قبلی، یعنی سیصد تومان از بیست قطعه اسکناس ۵۰۰، ۲۰۰ و ۵۰ ریالی تشکیل شده باشد. ده هزار تومان به‌سیصد تومان! داوطلب‌ها به‌نوبت بایستند!»

ولی کسی به‌نوبت نایستاد و جمعیت هم‌چنان ساکت بود. «شاید سیصد تومان هم گران است! بسیار خوب، ارزش را باز هم صد تومان

پایین می‌آورم. بیست عدد اسکناس ۵۰۰، ۲۰۰ و ۵۰ ریالی به‌ارزش دویست تومان بپردازید و بلافاصله ده‌هزار تومان بگیرید.»

باز هم کسی به‌سخن‌گو پاسخ نداد. طراح چیستان ادامه داد: «ممکن است پول خرد نداشته باشید. از این بابت خودتان را ناراحت نکنید. حاضرم به‌شما وام بدهم، تنها صورت حسابی به‌من بدهید که بدانم از هراسکناس چند عدد باید به‌شما وام بدهم. چون دراین‌صورت، بلافاصله ده هزار تومان جایزهٔ شما را می‌دهم و شما می‌توانید وام خود را بپردازید.»

۴۶. هزار

آیا می‌توانید عدد ۱۰۰۰ را با هشت رقم مشابه نشان دهید؟ (به‌جز رقم صفر، در ضمن می‌توانید از نشانه‌های چهارعمل اصلی حساب استفاده کنید).

۴۷. بیست و چهار

عدد ۲۴ را می‌توان به‌سادگی با سه رقم ۸ نوشت:

۸ + ۸ + ۸

آیا می‌توانید همین عدد ۲۴ را به‌یاری سه‌رقم مشابه دیگر (غیر از ۸) نشان دهید؟ مسأله بیش از یک پاسخ دارد.

۴۸. سی

عدد ۳۰ را می‌توان به‌سادگی با سه رقم ۵ نشان داد:

۵ × ۵ + ۵

اکنون همین عدد ۳۰ را با سه رقم مشابه دیگر نشان دهید. اگر کوشش کنید می‌توانید پاسخ‌های زیادی به‌دست آورید.

۴۹. رقم‌های نامعلوم

دراین ضرب نزدیک به‌نیمی از رقم‌ها معلوم نیستند و، به‌جای آن‌ها، ستاره گذاشته‌ایم:

```
   *۱*×
   ۳*۲
  -----
   *۳*
  ۳*۲*  +
 *۲*۵
 ------
 ۱*۸*۳۰
```

آیا می‌توانید رقم‌های نامعلوم را معین کنید؟

۵۰. چه عددهایی؟

این مساله هم شبیه مسالهٔ بالا است و باید رقم‌های نامعلوم را معین کرد.

```
   **۵×
   ۱**
  -----
   ۲**۵
  ۱۳*۰  +
  ***
 ------
 ۴*۷۷*
```

۵۱. رقم‌های تقسیم

دراین تقسیم، مقدار رقم‌های نامعلوم را پیدا کنید.

```
*۲*۵* | ۳۲۵
***   |-----
------| ۱**
*۰**
*۹**
-----
  *۵*
 -*۵*
-----
```

۵۲. بخش بر یازده

عدد نه رقمی بنویسید، که درآن، هیچ یک از رقم‌ها تکراری نباشد (یعنی همه رقم‌ها با هم فرق داشته باشند) و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

بزرگ‌ترین این عددها کدام است؟

کوچک‌ترین آن‌ها کدام است؟

۵۳. پیش‌آمدهای شگفت در ضرب

به‌این ضرب توجه کنید:

۴۸ × ۱۵۹ = ۷۶۳۲

این ضرب از این جهت جالب است که، درآن، نه رقم از یک تا نه، هرکدام یک‌بار به‌کار رفته است.

آیا می‌توانید نمونهٔ دیگری مثل این ضرب را پیدا کنید؟

آیا می‌توانید بگویید، مسأله چند پاسخ دارد؟

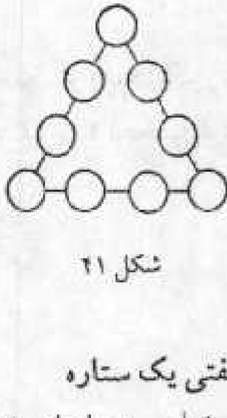
۵۴. مثلث عددی

از دایره‌هایی که روی ضلع‌های مثلث‌شکل ۴۱ قرار دارند، نه رقم از یک تا نه را، چنان قرار دهید که، مجموع عددها، در هرضلع مثلث،

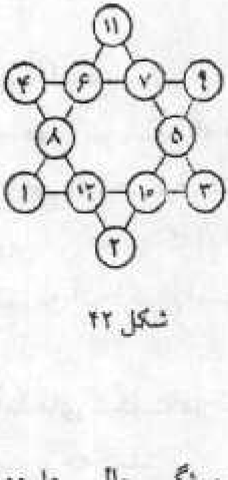
برابر بیست شود.

۵۵. باز هم مثلث عددی

همهٔ رقم‌های از یک تا نه را در دایره‌های مثلث شکل ۴۱، چنان قرار دهید که، مجموع عددهای هرضلع آن، برابر هفده شود.



شکل ۴۱



شکل ۴۲

۵۶. شگفتی یک ستاره

شش ضلعی ستاره‌ای شکل ۴۲، ویژگی جالبی دارد: هریک از شش ردیف عددهای آن مجموع ثابتی دارند:

۱۱+۶+۸+۱=۲۶　　۴+۶+۷+۹=۲۶

۱۱+۷+۵+۳=۲۶　　۴+۸+۱۲+۲=۲۶

۱+۱۲+۱۰+۳=۲۶　　۹+۵+۱۰+۲=۲۶

ولی مجموع عددهایی که در رأس‌های این شش ضلعی قرار گرفته‌اند، مجموع دیگری دارند:

۴ + ۱۱ + ۹ + ۳ + ۲ + ۱ = ۳۰

آیا می‌توانید عددهای درون دایره‌های این شش ضلعی را طوری بازسازی کنید که، نه‌تنها مجموع عددهای هریک از ضلع‌های آن، بلکه مجموع عددهای رأس‌های آن نیز، برابر ۲۶ شود؟

حل سرگرمی‌های عددی
(از شمارهٔ ۴۵ تا ۵۶)

۴۵. هر سه مسأله بدون پاسخ است. برای این‌که بی‌پاسخ بودن آن‌ها را ثابت کنیم، ناچاریم اندکی از زبان جبر یاری بخواهیم:

برای ۵۰۰ تومان: اگر تعداد ۵۰۰ ریالی‌ها را x، ۲۰۰ ریالی‌ها را y و ۵۰ ریالی‌ها را z بگیریم، باید داشته باشیم:

$$۵۰۰x + ۲۰۰y + ۵۰z = ۵۰۰۰$$

که اگر دو طرف این برابری را به ۵۰ کوچک کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۱۰x + ۴y + z = ۱۰۰$$

از طرف دیگر، بنابر شرط مسأله، باید تعداد اسکناس‌ها روی هم برابر ۲۰ باشد،

$$x + y + z = ۲۰$$

اگر این دو برابری را از هم کم کنیم، داریم:

$$۹x + ۳y = ۸۰$$

و اگر دو طرف این برابری را بر سه بخش کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۳x + y = ۲۶\frac{۲}{۳}$$

چون x و y عددهای درستی هستند، باید مجموع $۳x + y$ برابر با عدد درستی باشد. درحالی که مجموع آن‌ها برابر عدد کسری $۲۶\frac{۲}{۳}$ شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، این برابری، ناممکن است. یعنی، مسأله دارای پاسخ نیست. اگر همین روش را برای حالت‌های ۳۰۰۰ ریال و ۲۰۰۰ ریال هم به‌کار بریم، به‌ترتیب به‌برابری‌های زیر

خواهیم رسید:

$$3x + y = 13\frac{1}{3}$$

$$3x + y = 6\frac{2}{3}$$

که با توجه به‌درست بودن عددهای x و y، هیچ‌کدام از آن‌ها، ممکن نیست.

همان‌طور که دیده می‌شود، طرح‌کنندهٔ چیستان، درهیچ کدام از این حالت‌ها ریسک نکرده است، زیرا درهیچ کدام از این سه حالت، با توجه به‌شرط‌هایی که وجود دارد، مسأله پاسخ ندارد.

ولی اگر ۲۰ عدد اسکناس ۵۰۰، ۲۰۰ و ۵۰ ریالی به‌ارزش ۴۰۰۰ ریال طلب می‌کرد، مسأله دارای پاسخ بود و به‌سادگی، پاسخ‌های مختلف آن به‌دست می آمد.

مثلاً یکی از پاسخ‌های آن چنین است:

۶ عدد ۵۰۰ ریالی، ۲ عدد ۲۰۰ ریالی و ۱۲ عدد ۵۰ ریالی.

۴۶. پاسخ: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$

۴۷. دو پاسخ را دراین جا می‌آوریم:

$3^3 - 3 = 24$ و $22 + 2 = 24$

۴۸. سه پاسخ مسأله، چنین است:

$33 - 3 = 30$؛ $3^3 + 3 = 30$؛ $6 \times 6 - 6 = 30$

۴۹. رقم‌های مجهول را می‌توان به‌سادگی به‌دست آورد. برای سادگی کار، عددهای هرسطر را شماره‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{array}{rl}
1\times & \dots\dots\dots\dots I \\
3*2 & \dots\dots\dots\dots II \\
\hline
3 & \dots\dots\dots\dots III \\
3*2* & \dots\dots\dots\dots IV \\
*2*5 & \dots\dots\dots\dots V \\
\hline
1*8*30 & \dots\dots\dots\dots VI
\end{array}$$

روشن است، ستاره سمت راست ردیف III برابر صفر است،

زیرا آخرین رقم از ردیف *VI*، برابر صفر است.

اکنون توجه می‌کنیم، رقم سمت راست ردیف *I* باید چنان باشد که وقتی که در ۲ ضرب شود، عددی با رقم سمت راست صفر (رقم سمت راست ردیف *III*) و اگر در ۳ ضرب شود، عددی با رقم سمت راست پنج (رقم سمت راست ردیف *V*) به‌وجود آورد و، بنابراین، این رقم برابر ۵ است.

هم‌چنین، به‌سادگی معلوم می‌شود، رقم مجهول ردیف *II* برابر ۸ است، زیرا تنها از ضرب عدد ۸ در ۱۵ عددی به‌دست می‌آید که به ۲۰ ختم می‌شود.

سرانجام روشن می‌شود، رقم سمت چپ ردیف *I* برابر ۴ است، زیرا تنها عدد ۴ است که پس از ضرب در ۸، عددی به‌دست می‌آید که با ۳ آغاز می‌شود (ردیف *IV*).

پیداکردن بقیه رقم‌های مجهول دشوار نیست، زیرا هردو عامل ضرب معلوم است و، درنتیجه، می‌توان با ضرب آن‌ها در یک‌دیگر، رقم‌های نامعلوم را معین کرد.

ضرب اصلی چنین است:

$$
\begin{array}{r}
۴۱۵ \times \\
۳۸۲ \\
\hline
۸۳۰ \\
۳۳۲۰ \\
۱۲۴۵ \\
\hline
۱۵۸۵۳۰
\end{array}
$$

۵۰. شبیه به‌مسأله قبل می‌توان دراین‌جا هم رقم‌های مجهول را به‌دست آورد و ضرب زیر را مشخص کرد:

$$\begin{array}{r} ۳۲۵\times \\ ۱۴۷ \\ \hline ۲۲۷۵ \\ ۱۳۰۰ \\ ۳۲۵ \\ \hline ۴۷۷۷۵ \end{array}$$

۵۱. جواب:

$$\begin{array}{r|l} ۵۲۶۵۰ & \underline{۳۲۵} \\ ۳۲۵ & ۱۶۲ \\ \hline ۲۰۱۵ & \\ ۱۹۵۰ & \\ \hline ۶۵۰ & \\ ۶۵۰ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۵۲. برای حل این مسأله باید روش قابلیت بخش بر ۱۱ را دانست. عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر مجموع رقم‌های ردیف زوج عدد را از مجموع رقم‌های ردیف فرد آن کم کنیم، باقی مانده صفر و یا بخش‌پذیر بر ۱۱ باشد.

به‌عنوان نمونه،عدد ۲۳۶۵۸۹۰۴ را درنظر می‌گیریم. مجموع رقم‌های ردیف زوج این عدد چنین است:

$$۰ + ۸ + ۶ + ۲ = ۱۶$$

و مجموع رقم‌های ردیف فرد آن:

$$۴ + ۹ + ۵ + ۳ = ۲۱$$

همانطور که می‌بینیم، تفاضل این‌دو مجموع، بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست و بنابراین عدد هم بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست[1]. ولی اگر عدد

۱. درحقیقت ۵- = ۲۱ - ۱۶ می‌شود و این به‌معنای آن است که باقی ماندهٔ عدد

۷۳۴۴۵۳۵ را درنظر بگیریم:

۵ + ۵ + ۴ + ۷ = ۲۱

۳ + ۴ + ۳ = ۱۰

۲۱ ـ ۱۰ = ۱۱

و چون این تفاضل، یعنی ۱۱، بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس عدد مفروض هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است. اکنون به‌سادگی می‌توان فهمید که رقم‌های مورد نظر را به‌چه ترتیبی بنویسیم تا بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. به‌عنوان نمونه عدد ۳۵۲۰۴۹۷۸۶ یکی از این عددها است. زیرا:

۶ + ۷ + ۴ + ۲ + ۳ = ۲۲

۸ + ۹ + ۰ + ۵ = ۲۲

و چون تفاضل ۲۲ ـ ۲۲ برابر با صفر می‌شود، عدد مفروض یکی از مضرب‌های ۱۱ می‌باشد.

بزرگ‌ترین عدد مورد نظر: ۹۸۷۶۵۲۴۱۳ و کوچک‌ترین آن‌ها ۱۰۲۳۴۷۵۸۶ می‌باشد.

۵۳. این مسأله دارای ۹ جواب است که در زیر داده شده است:

۱۲ × ۴۸۳ = ۵۷۹۶

۴۲ × ۱۳۸ = ۵۷۹۶

۱۸ × ۲۹۷ = ۵۳۴۶

۲۷ × ۱۹۸ = ۵۳۴۶

۳۹ × ۱۸۶ = ۷۲۵۴

۴۸ × ۱۵۹ = ۷۶۳۲

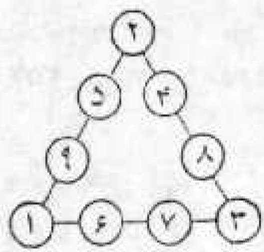
$\overrightarrow{\text{بر ۱۱}}$ مساوی ۵ ـ و یا ۶ می‌باشد (م)

۲۸ × ۱۵۷ = ۴۳۹۶

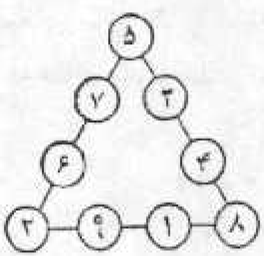
۴ × ۱۷۳۸ = ۶۹۵۲

۴ × ۱۹۶۳ = ۷۸۵۲

۵۴. حل دو مسأله در شکل‌های ۴۳ و ۴۴ داده شده است، و با جابه‌جا کردن رقم‌های وسط هر ردیف، می‌توان جواب‌های دیگری نیز به‌دست آورد:



شکل ۴۴



شکل ۴۳

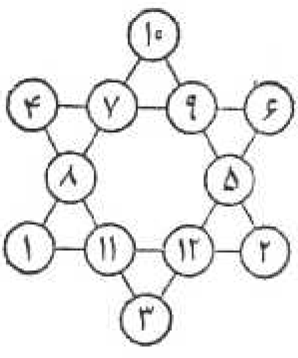
۵۶. برای این‌که عددهای واقع در دایره‌را جست‌وجو کنیم، می‌توان به‌روش زیر استدلال کرد:

مجموع عددهای رأس‌های ۶ ضلعی برابر با ۲۶ است و مجموع کل عددهای ۶ ضلعی برابر ۷۸، بنابراین مجموع عددهای ۶ ضلعی داخلی مساوی ۲۶ - ۷۸، یعنی ۵۲ می‌شود.

اکنون یکی از مثلث‌های بزرگ را درنظر می‌گیریم. مجموع عددهای هریک از ضلع‌های آن برابر ۲۶ می‌باشد. اگر این عدد را در ۳ ضرب کنیم، عدد ۷۸ به‌دست می‌آید که دراین‌حالت هریک از عددهای رأس‌های مثلث دوبار به‌حساب آمده است. و چون مجموع عددهای ۶ ضلعی داخلی مساوی ۵۲، بنابراین دو برابر مجموع

عددهای رأس‌های مثلث مساوی ۵۲ - ۷۸، یعنی ۲۶ می‌شود. درنتیجه مجموع عددهای سه‌رأس هریک از مثلث‌ها، مساوی ۱۳ خواهد شد.

از طرف دیگر، معلوم است که عددهای ۱۱ و ۱۲ هیچ‌یک نمی‌توانند در رأس‌ها جا بگیرند. زیرا دراین‌صورت مجموع عددهای رأس‌های مثلث از ۱۳ بیشتر می‌شود. بنابراین می‌توان جست و جو را از ۱۰ شروع کرد، یعنی دریکی از رأس‌ها ۱۰ قرار داد. و چون باید مجموع رأس‌های مثلث ۱۳ شود، در دو رأس دیگر آن به‌ناچار ۱ و ۲ قرار خواهد گرفت.



شکل ۴۵

واگر، جست و جو را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، عددهای هریک از دایره‌ها را پیدا خواهیم کرد. این عددها در شکل ۴۵ نشان داده شده است.

۶

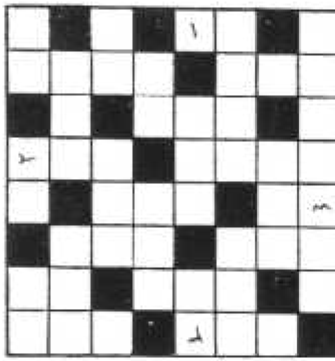
مکاتبهٔ رمزی

۵۷. شبکه

کسی می‌خواست به‌دوست خود نامه‌ای بنویسد، به‌نحوی که هیچ‌کس نتواند نوشتهٔ او را بفهمد و برای این منظور، از یک نوع مکاتبهٔ «رمزی» استفاده کرد. انواع مختلفی از مکاتبه‌های رمزی درست شده است که نه تنها برای مکاتبهٔ محرمانهٔ دو دوست به‌کار می‌رود، بلکه در مکاتبه‌های سیاستمداران و جنگ‌جویان هم، برای حفظ رازهای مملکتی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. ما دراین‌جا دربارهٔ یکی از روش‌های مکاتبهٔ رمزی، که به‌نام روش «شبکه» معروف است صحبت می‌کنیم. این روش از جملهٔ ساده‌ترین آن‌ها است و کاملاً به‌حساب مربوط می‌شود.

کسانی که می‌خواهند با این روش، مکاتبهٔ رمزی با یک‌دیگر داشته باشند، هرکدام یک «شبکه» پیش خود نگه داشته‌اند. منظور از «شبکه»، مقوا یا کاغذ مربع‌شکلی است که به‌خانه‌های شطرنجی تقسیم شده و بعضی از خانه‌های آن را بریده‌اند (یعنی مربع شطرنجی به‌صورت یک شبکهٔ سوراخ‌سوراخ درآمده است). نمونهٔ یک شبکه را در شکل ۴۶ نشان داده‌ایم.

(خانه های سیاه به‌منزلهٔ سوراخ‌ها هستند) سوراخ‌ها نه به‌طور



شکل ۴۶. شبکه‌ای برای مکاتبهٔ رمزی (کاغذی به‌همین اندازه انتخاب کنید و روی آن نامهٔ مخفی خود را بنویسید. شکل ۵۰)

دلخواه، بلکه با نظم معینی به‌وجود آمده‌اند، که برای شما با توضیح‌های زیر، روشن می‌شود.

فرض کنید لازم باشد این عبارت به‌طور محرمانه فرستاده شود:

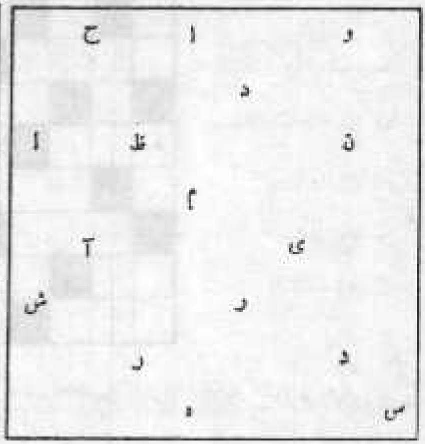
«واحد نظامی آرش در سه کیلومتری رودخانه منتظر رسیدن واحدهای شما است ـ فرماندهی».

شبکه را روی کاغذ سفیدی قرار می‌دهیم و در داخل سوراخ‌ها (روی کاغذ سفید)، به‌ترتیب حرف‌های عبارت مورد نظر را می‌نویسیم.

چون در شبکه، ۱۶ سوراخ وجود دارد، فقط این قسمت عبارت نوشته می‌شود:

«واحد نظامی آرش در سه»

اگر شبکه را از روی کاغذ برداریم، شبیه شکل ۴۷ پیدا خواهد شد. به‌نظرتان می‌رسد که تا این‌جا هیچ‌گونه پنهان کاری وجود ندارد و



شکل ۴۷. ابتدا در سوراخ‌های شبکه، ۱۶ حرف اول را می‌نویسیم.

شکل ۴۸. سپس ۱۶ حرف بعد را می‌نویسیم.

هرکسی می‌تواند آن را بفهمد. ولی این تنها شروع کار است، یادداشت به‌همین جا ختم نمی‌شود.شبکه رابه‌اندازه یک چهارم دور و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی کاغذ دوران می‌دهیم، به‌نحوی که‌عدد ۲ (که قبلاً در حاشیهٔ چپ قرار داشت)، در بالای شبکه قرار بگیرد. وقتی شبکه را به‌این وضع درآوردیم، تمام نوشته‌های قبل، زیر آن پنهان و زیر سوراخ‌های شبکه، کاغذ سفید دیده می‌شود. دراین خانه‌ها ۱۶ حرف بعدی عبارت مورد نظر را می‌نویسیم. اکنون اگر شبکه را برداریم، نوشته‌ای شبیه شکل ۴۸ خواهیم دید.

ازاین نوشته، نه‌تنها یک فرد بیگانه، بلکه حتا خود نویسنده هم (اگر متن پیام خود را فراموش کرده باشد)، سر در نخواهد آورد. تا این‌جا تقریباً نیمی از پیام نوشته شده است:

«واحد نظامی آرش در سه کیلومتری رودخانه»

برای این‌که دنبالهٔ پیام نوشته شود، باید دوباره شبکه را یک ربع دور، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت چرخاند. تمام آن‌چه که تا این‌جا نوشته شده است، پنهان و دوباره ۱۶ خانه سفید، زیر سوراخ‌های شبکه پیدا می‌شود. دراین خانه‌ها هم، ۱۶ حرف بعدی پیام را می‌نویسیم که پس از آن با برداشتن شبکه، شکل ۴۹ به‌دست می‌آید.

	و	ک	ن	ا	ی	ح	ت
ل		ظ	د	و		ر	
ر	ن	م		س	ظ	ت	ا
ر	ی		ی	م	د		ر
	و	ی	ن		د	آ	
و		ا	ر	خ		ح	ش
ا	د	ن		د	ر	ه	
س	ه		ا	ه		ی	م

شکل ۴۹. دوباره شبکه را چرخانده‌ایم.

ش	و	ک	ن	ا	ی	ح	ت
ل	م	ظ	د	و	ا	ر	س
ر	ن	م	ت	س	ظ	ت	ا
ر	ی	ق	ی	م	د	و	ر
م	و	ی	ن	ا	د	آ	ن
و	د	ا	ر	خ	ة	ح	ش
ا	د	ن	ی	د	ر	ه	آ
س	ه	پ	ا	ه	ب	ی	م

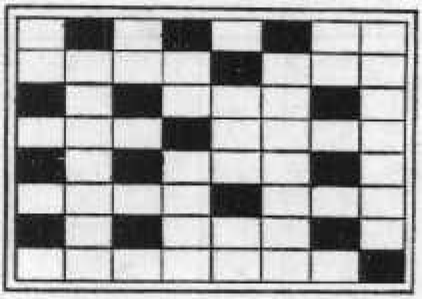
شکل ۵۰. نامهٔ رمز آماده است.

بالاخره، شبکه را برای بار آخر می‌چرخانیم، به‌نحوی که عدد ۴ بالا قرار بگیرد، و بقیهٔ پیام را درخانه‌های شبکه می‌نویسیم. چون سه خانهٔ سفید باقی می‌ماند، سه حرف اول الفبا: ا، ب و پ را درآن‌ها قرار می‌دهیم که جای خالی درآن باقی نماند.

نامه به‌صورتی در می‌آید که درشکل ۵۰ نشان داده شده است.

به‌جای شبکهٔ مربع‌شکل، می‌توان از شبکهٔ مستطیلی، به‌شکل کارت‌پستی، با سوراخ‌های عریض‌تر استفاده کرد (شکل ۵۱). در سوراخ‌های این شبکه، به‌جای حرف‌های جداگانه، قسمتی از کلمه و یا، اگر جا بگیرد، تمام کلمه را می‌نویسیم.

تصور نکنید که وقتی نوشته به‌این صورت باشد، راحت‌تر خوانده می‌شود.



شکل ۵۱. شبکه به‌شکل کارت پستی.

اگرچه سیلاب‌ها و یا کلمه‌های جداگانه، دیده می‌شود، ولی چنان پراکنده و بی‌نظم قرار دارند که راز نوشته کاملاً مخفی می‌ماند. شبکه را طوری قرار می‌دهیم، که ابتدا یکی از ضلع‌های بزرگ‌تر آن به‌طرف بالا باشد. سپس ضلع بزرگ‌تر دوم را به‌طرف بالا قرار می‌دهیم؛ آن‌وقت صفحه شبکه را به‌پشت بر می‌گردانیم و دوباره از دو جهت آن استفاده می‌کنیم. درهر وضع جدید شبکه، آن‌چه که قبلاً نوشته شده است، زیر آن پنهان می‌ماند.

اگر بیش از یک نوع از این شبکه‌ها وجود نداشته باشد، نمی‌توان

این روش مکاتبه را، رمزی به‌حساب آورد؛ زیرا طبیعی است که هرکسی می‌تواند نمونه آن را (که منحصر به‌فرد است) بسازد و راز نوشته را کشف کند. ولی در واقع، این‌طور نیست و تعداد شبکه‌هایی که برای این منظور می‌توان ساخت، خیلی زیاد است.

همهٔ شبکه‌هایی را که می‌توان با یک مربع ۶۴ خانه‌ای درست کرد، در شکل ۵۲ نشان داده‌ایم. شما می‌توانید برای سوراخ‌های شبکه، ۱۶ خانه را انتخاب کنید، تنها باید به‌این نکته توجه کنید که در ردیف خانه‌هایی که انتخاب می‌کنید، شماره‌های مساوی وجود نداشته باشد. برای شبکه‌ای که ما در شکل ۴۶ مورد استفاده قرار می‌دادیم،

۱	۵	۹	۱۳	۴	۳	۲	۱
۲	۶	۱۰	۱۴	۸	۷	۶	۵
۳	۷	۱۱	۱۵	۱۲	۱۱	۱۰	۹
۴	۸	۱۲	۱۶	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۶	۱۲	۸	۴
۹	۱۰	۱۱	۱۵	۱۲	۱۱	۷	۳
۵	۶	۷	۸	۱۴	۱۰	۶	۲
۱	۲	۳	۴	۱۳	۹	۵	۱

شکل ۵۲. بیش از ۴ میلیارد شبکه با یک مربع

برای سوراخ‌ها، شماره‌های زیر را در نظر گرفتیم:

۵، ۴، ۲

۱۴

۷، ۱۱، ۹

۱۶

۱۵، ۸

۱۲، ۳

۶، ۱۰

۱، ۱۳

همان‌طور که دیده می‌شود، حتا یکی از شماره‌ها هم تکرار نشده است.

روش نمره‌گذاری خانه ها هم مشکل نیست و از روی شکل ۵۲ به‌خوبی روشن می‌شود. ابتدا مربع را، به‌کمک دو خط افقی و قائم، به‌چهار مربع کوچک‌تر بخش می‌کنیم که آن‌ها را با عددهای رومی *I*، *II*، *III*، *IV* نشان داده‌ایم (شکل ۵۳).

IV	*III*
I	*II*

شکل ۵۳

در مربع *I*، عددها را به‌ردیف معمولی می‌نویسیم. مربع *II* هم، همان مربع *I* است، که تنها به‌اندازه یک چهارم دور بـه‌طرف راست چرخیده است. اگر مربع *II* را یک‌چهارم دور بچرخانیم، مـربع *III* به‌دست می‌آید و به‌همین ترتیب به‌کمک مربع *III*، مـربع *IV* پیدا خواهد شد.

حالا ببینیم، از نظر ریاضی، چند نوع شبکه می‌توان درست کرد. خانهٔ شماره ۱ را به‌عنوان سوراخ شبکه، دریکی از چهارجای خـود

می‌توان انتخاب کرد. به‌هریک از این چهار حالت، می‌توان یکی از چهار شمارهٔ ۲ را اضافه کرد؛ بنابراین دو سوراخ اول شبکه ۴ × ۴، یعنی ۱۶ نوع قابل انتخاب است. سه سوراخ اول را ۴ × ۴ × ۴، یعنی ۶۴ جور می‌توان اختیار کرد. اگر به‌همین ترتیب استدلال کنیم، نتیجه می‌گیریم که ۱۶ سوراخ شبکه را با $۴^{۱۶}$ روش می‌توان انتخاب کرد. این عدد از ۴ میلیارد هم بزرگ‌تر است. اگر این عدد را چند مرتبه کوچک‌تر هم به‌حساب آوریم (زیرا حالت‌هایی که سوراخ‌های شبکه پهلوی هم قرار بگیرند، برای مکاتبهٔ رمزی مناسب نیستند)، باز هم صدها میلیون نوع شبکه دراختیار خواهیم داشت، یک اقیانوس کامل! آیا به‌این ترتیب، می‌شود حالت‌های مختلف شبکه را کشف رمزکرد؟

اگر فرض کنیم، برای هرحالت شبکه، تنها یک دقیقه وقت لازم باشد، برای کشف یک رمز ممکن است صدها میلیون دقیقه وقت صرف شود، یعنی هزاران سال! ولی همهٔ این‌ها وقتی درست است که کارها را به‌اصطلاح با «دست خالی» انجام دهیم. در کتاب «سرگرمی‌های جبر» که از همین مؤلف (و همین مترجم) چاپ شده است، دربارهٔ محاسبه‌های سریع به‌کمک حساب‌گرها صحبت شده است. این حساب‌گرها می‌توانند، طبق برنامهٔ معینی که به‌آن‌ها داده شده است، صدها هزار و حتی میلیون‌ها محاسبه را در یک ثانیه انجام دهند. این حساب‌گرها تنها محاسبه را انجام نمی‌دهند. مثلاً آن‌ها می‌توانند تمام جواب‌های ممکن را به‌دست آورند و آزمایش کنند که آیا این جواب‌ها شامل متنی هستند که دارای معنا باشد؛ دراین مورد تنها لازم است که برنامهٔ مورد نظر به‌حساب‌گر داده شود. اگر برای

آزمایش هر شبکه با حسابگر، مثلاً یک هزارم ثانیه وقت لازم باشد، برای صدها میلیون شبکه، صدهزار ثانیه، یعنی چند شبانه‌روز، وقت لازم می‌شود. همان‌طور که می‌بینید، در شرایط امروزی مخفی کردن مکاتبه‌ها، کار بسیار مشکلی است.

۵۸. شبکه را چگونه به‌خاطر بسپاریم؟

فرض می‌کنیم که حفظ رازنامه، برای ۲ یا ۳ روز کافی باشد و بتوان امیدوار بود که این مدت برای فرستادن آن به‌مرکز محاسبه و کشف رازنامه کافی نباشد و به‌همین مناسبت، تصمیم بگیرند که از شبکه، برای مکاتبهٔ رمزی خود، استفاده کنند. طبیعی است که دراین حالت، دو طرف مکاتبه باید مراقب باشند که شبکهٔ کشف، در دست بیگانه نیفتد. بهترین راه این است که چنین شبکه‌ای وجود نداشته باشد، هروقت که نامه رسید، نمونه‌ای از آن را درست کنند و پس از خواندن نامه دوباره از بین ببرند. ولی چگونه سوراخ‌های شبکه را به‌خاطر بسپاریم؟ دراین‌جا هم، ریاضیات به‌کمک ما می‌آید. خانه‌های سوراخ‌شده را با رقم ۱ و بقیهٔ خانه‌های شبکه را با رقم ۰ نشان می‌دهیم. دراین صورت:

ردیف اول خانه‌های شبکه را می‌توان به‌این ترتیب نشان داد (شکل ۵۴):

۰۱۰۱۰۰۱۰

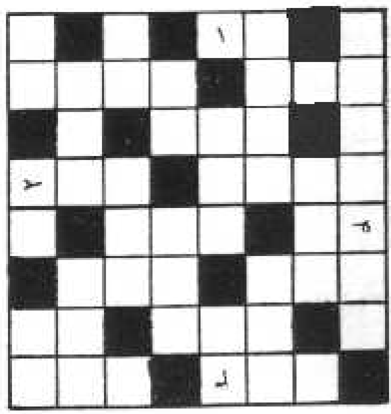
و یا پس از حذف صفر سمت چپ:

۱۰۱۰۰۱۰

ردیف دوم، پس‌ازحذف صفرهای سمت چپ چنین نشان داده می‌شود:

۱۰۰۰

(و ردیف‌های بعد به‌این ترتیب می‌آید:)



= ۰۱۰۱۰۰۱۰ = ۸۲

= ۰۰۰۰۱۰۰۰ = ۸

= ۱۰۱۰۰۰۱۰ = ۱۶۲

= ۰۰۰۱۰۰۰۰ = ۱۶

= ۰۱۰۰۰۱۰۰ = ۶۸

= ۱۰۰۰۱۰۰۰ = ۱۳۶

= ۰۰۱۰۰۰۱۰ = ۳۴

= ۰۰۰۱۰۰۰۱ = ۱۷

شکل ۵۴ حساب شبکهٔ رمزی

۱۰۰۰۱۰۰۰ ۱۰۱۰۰۰۱۰

۱۰۰۰۱۰ ۱۰۰۰۰

۱۰۰۰۱ ۱۰۰۰۰۱۰۰

برای این که این عددها ساده‌تر باشند، بهتر است، به‌جای مبنای ۱۰، برای نوشتن آن‌ها از مبنای ۲، استفاده کنیم. در عددنویسی به‌مبنای ۲، واحد هررقم ۲ برابر واحد رقم سمت راست آن است (در عددنویسی به‌مبنای ۱۰، واحد هررقم ۱۰ برابر واحد رقم سمت راست آن است). به‌این ترتیب رقم سمت راست با واحد ۱، رقم دوم با واحد ۲، رقم سوم با واحد ۴، رقم چهارم با واحد ۸ و غیره، مشخص می‌شود. با توجه به‌این مفهوم، عدد ۱۰۱۰۰۱۰ راکه معرف وضع سوراخ‌ها در ردیف اول شبکه است، می‌توان به‌این صورت نشان داد:

$$۶۴ + ۱۶ + ۲ = ۸۲$$

عدد ۱۰۰۰ (ردیف دوم) در تبدیل به‌دستگاه دهدهی، با عدد ۸ نشان داده می‌شود.

بقیه عددها هم باید به‌این صورت تغییر کنند.

$$۱۲۸ + ۳۲ + ۲ = ۱۶۲$$

$$۱۶$$

$$۶۴ + ۴ = ۶۸$$

$$۱۲۸ + ۸ = ۱۳۶$$

$$۳۲ + ۲ = ۳۴$$

$$۱۶ + ۱ = ۱۷$$

به‌خاطر سپردن عددهای ۸۲، ۸، ۱۶۲، ۱۶، ۶۸، ۱۳۶، ۳۴، ۱۷ خیلی مشکل نیست. با بخاطر داشتن این عددها می‌توان عددهای اولیه را (که در مبنای عددشماری ۲ بودند) پیدا کرد و به کمک آن‌ها جای سوراخ‌ها را در شبکه، معین کرد.

برای این‌که بدانیم، چگونه این عددها را به‌مبنای عددشماری ۲ می‌برند، عدد سطر اول، یعنی ۸۲ را مثال می‌زنیم.

ابتدا آن را به ۲ بخش می‌کنیم، تا معلوم شود چند تا عدد ۲ درآن وجود دارد؛ خارج‌قسمت برابر ۴۱ و باقیمانده برابر صفر می‌شود، یعنی اولین رقم از سمت راست عدد (در مبنای ۲) برابر صفر است. عدد ۴۱ را، که به‌دست آورده‌ایم، دوباره به ۲ بخش می‌کنیم، خارج‌قسمت برابر ۲۰ و باقیماندهٔ تقسیم برابر ۱ می‌شود. یعنی رقم دوم عدد (از سمت راست) برابر واحد است. ۲۰ را به ۲ تقسیم می‌کنیم، خارج‌قسمت ۱۰ و باقیمانده برابر صفر می‌شود: سومین رقم از سمت راست برابر صفر است. از تقسیم ۱۰ بر ۲، خارج‌قسمت مساوی ۵ و باقیمانده برابر صفر می‌شود: رقم چهارم عدد مساوی صفر است. از تقسیم ۵ بر ۲، به‌خارج قسمت ۲ و باقیماندهٔ واحد می‌رسیم: رقم پنجم عدد مساوی واحد است. از تقسیم ۲ بر ۲ به‌خارج قسمت واحد و باقیماندهٔ برابر صفر می‌رسیم: رقم ششم مساوی صفر و رقم هفتم برابر واحد است.

بنابراین عدد ۸۲ در مبنای ۲ چنین نوشته می‌شود:

۱۰۱۰۰۱۰

چون این عدد تنها ۷ رقم دارد، درحالی که هرردیف شبکه از ۸ خانه درست شده است، یک رقم صفر در سمت چپ این عدد قرار می‌دهیم:

۰۱۰۱۰۰۱۰

یعنی ردیف اول شبکه از راست به‌چپ، درخانه‌های دوم، پنجم و هفتم، سوراخ است.

به‌همین ترتیب، جای سوراخ‌های شبکه، در ردیف‌های بعدی هم معلوم می‌شود.

همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، روش‌های زیادی برای پنهان‌نویسی وجود دارد، ولی ما به‌این مناسبت، تنها به‌روش شبکه‌ای پرداختیم که جنبه‌های مختلف آن، رابطهٔ نزدیکی با ریاضیات دارد، و نشان می‌دهد که کاربرد ریاضیات در چه زمینه‌هایی از زندگی می‌تواند به‌ما کمک کند.

۷

داستان‌هایی دربارهٔ عددهای بزرگ

۵۹. معاملهٔ سودآور

کسی نمی‌داند، این داستان کجا و کی اتفاق افتاده است. حتا احتمال زیاد دارد که هرگز اتفاق نیفتاده باشد، ولی خواه داستانی واقعی باشد یا ساختگی، ارزش شنیدن را دارد.

I

ثروت‌مند میلیونری با خوشحالی فوق‌العاده‌ای از مسافرت مراجعت کرد. درراه اتفاق بسیار جالبی افتاده بود که می‌توانست سود زیادی برای او دربر داشته باشد.

او برای افراد خانواده‌اش تعریف کرد: «شانس بزرگی به‌ما رو کرده. بی‌جهت نیست که می‌گویند پول، پول می‌آورد. چه خوشبختی! در راه مرد ناشناسی به‌من برخورد کرد. ظاهرش هیچ‌چیز جالبی نداشت و به‌همین مناسبت هیچ میلی به‌صحبت با او پیدا نکردم. درهمین مذاکره بود که معاملهٔ سودآوری انجام دادم، معامله‌ای که هوش از سرآدم به در می‌برد.

مرد به‌من این‌طور پیشنهاد کرد:

ـ ما با هم قراری می‌گذاریم. تا یک ماه من هرروز یک ملیون تومان

پول به‌شما می‌دهم. درعوض، چیزی که از شما می‌خواهم خیلی ناچیز است. روز اول در مقابل یک ملیون تومان (به‌واقع باورکردنی نیست) تنها یک ریال باید به‌من بپردازید.

من به‌گوش‌های خودم اعتماد نمی‌کردم و خیال می‌کردم که اشتباهی می‌شنوم، پرسیدم:

ـ فقط یک ریال؟

ـ بله فقط یک ریال. روز دوم در مقابل یک ملیون تومان ۲ ریال می‌خواهم.

من که به‌هیجان آمده بودم پرسیدم:

ـ خوب، بعد؟

ـ و بعد: در مقابل یک ملیون تومان سوم، ۴ ریال. روز چهارم ۸ ریال و روز پنجم ۱۶ ریال و به‌همین ترتیب هرروز دو برابر روز قبل به‌من خواهی پرداخت.

من پرسیدم:

ـ بعد چی؟

ـ هیچ! بعد معاملهٔ ما تمام خواهد شد. فقط باید به‌قول خودت وفا کنی؛ من هرصبح یک ملیون تومان پول برای شما می‌آورم و شما همان مبلغی که با هم قرار گذاشته‌ایم به‌من خواهی پرداخت. و قبل از آن که ماه تمام شود، هیچ‌کدام حق به‌هم زدن قرارداد را نداریم.

ببینید یک ملیون تومان پول در مقابل یک ریال! اگر به‌راستی پول‌ها تقلبی نباشد، باید نسبت به‌عقل این مرد شک کرد، ولی وقتی که کار سودآوری به‌آدم رو می‌کند تردید نباید کرد. به‌او گفتم:

ـ من به‌شما مرتباً خواهم پرداخت؛ شما هم نباید کلکی درکارتان باشد، پول‌ها را درست و صحیح بپردازید.

شکل ۵۵. فقط و فقط یک ریال

- از جانب من نگران نباشید، فردا صبح خدمت خواهم رسید.

من فقط از یک چیز می‌ترسم: «آیا پول‌ها را خواهد داد؟ نکند سرعقل بیاید و از معامله پشیمان شود! ولی زیاد انتظار نباید کشید، تا فردا معلوم می‌شود.»

II

یک‌روز گذشت. صبح زود، پشت پنجرهٔ ملیونر را زدند. این همان مرد ناشناسی بود که در راه با صاحب‌خانه دیدار کرده‌بود.

مرد گفت: «پول‌ها حاضر است، من سهم خودم را آورده‌ام».

و درواقع، این مرد عجیب وارد اتاق شد و دسته‌دسته پول‌ها را برزمین گذاشت، کامل و بدون هیچ تقلبی. درست یک ملیون تومان

شمرد و سپس گفت: «ـ من به‌قول خودم وفا کردم. شما هم سهم خودتان را بپردازید.»

صاحب‌خانه یک سکه یک ریالی روی میز گذاشت و با نگرانی به‌ناشناس نظر انداخت. آیا مهمان آن را برخواهد داشت یا تغییر عقیده می‌دهد و یک ملیون پول را با خود می‌برد؟ ولی مرد ناشناس تردیدی به‌خود راه نداد، سکه را برانداز کرد و با دست امتحان نمود و سپس آن را در خورجین خود انداخت و گفت: «فردا همین موقع منتظر من باش. فراموش نکنی که برای فردا باید ۲ ریال ذخیره کنی.»

مرد پول‌دار آن‌چه را که پیش آمده بود باور نمی‌کرد: یک ملیون تومان از آسمان افتاده بود! دوباره پول‌ها را شمرد و اطمینان پیدا کرد که هیچ کدام تقلبی نیست. پول‌ها را در جایی پنهان کرد و منتظر یک ملیون تومان فردا ماند.

شب، ملیونر دچار تردید شد: نکند که این مرد ناشناس، کلاه‌بردار و دزد باشد! شاید او می‌خواهد بداند من پول‌هایم را کجا نگه‌داری می‌کنم، تا بعد درزمان مناسب، با یک دسته از همکاران خود، حمله کند.

همهٔ درها را قفل کرد. مرتباً از پنجره بیرون را می‌پایید و تا مدتی خوابش نبرد.

فردا صبح، دوباره به‌پنجره زده شد، ناشناس پول‌ها را آورده بود. یک ملیون تومان شمرد و به‌جای آن ۲ ریال دریافت کرد. پول خُرد را درخورجینش انداخت و از در خارج شد.

شکل ۵۶. مرد ناشناس به‌پنجرهٔ اتاق زد ...

فقط گفت: «ـ مواظب باشید که برای فردا ۴ ریال باید تهیه کنید.»

ملیونر در پوست خود نمی‌گنجید. یک ملیون تومان پول مجانی دوم هم به‌دست او رسیده بود. ولی مهمان هیچ شباهتی به‌دزدها نداشت، به‌هیچ وجه به‌اطراف خود نگاهی نکرد، دربارهٔ هیچ‌چیز کنجکاوی ننمود و تنها چند ریال خودش را طلب کرد. مرد عجیبی بود! اگر از این‌گونه افراد زیاد بود، مردم عاقل دنیا راحت زندگی می‌کردند!

روز سوم هم مرد ناشناس آمد و سومین قسط یک ملیون تومانی خود را به‌ازای ۴ ریال پرداخت.

به‌همین ترتیب، روز چهارم هم یک ملیون تومان خود را با ۸ ریال عوض کرد.

روز پنجم فرا رسید و یک میلیون تومان با ۱۶ ریال مبادله شد و روز ششم با ۳۲ ریال.

بعد از گذشت هفت روز از ابتدای معامله، مرد پول‌دار ما هفت ملیون تومان پول گرفته بود، درحالی که در مقابل آن، چیز باارزشی نپرداخته بود:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127 \text{ (ریال)}$$

ملیونر حریص از این همه پول ذوق زده شده بود و فقط از این متأسف بود که چرا قرارداد را تنها برای یک ماه بسته است. ۷ ملیون تومان پول گرفته، بدون آن‌که چیزی پرداخته باشد. آیا می‌تواند ناشناس را وادار کند که لااقل برای ۱۵ روز بیشتر قرارداد را تمدید کند؟ تنها از این ترس داشت، مبادا طرف معامله متوجه شود و آن‌وقت تمام پول از دستش برود ...

ولی ناشناس هرروز صبح به‌طور منظم می‌آمد و یک ملیون تومان را تحویل می‌داد و به‌جای آن سهم خودش را به‌این ترتیب می‌گرفت:

روز هشتم	۱۲۸ ریال
روز نهم	۲۵۶ ریال
روز دهم	۵۱۲ ریال
روز یازدهم	۱۰۲۴ ریال
روز دوازدهم	۲۰۴۸ ریال
روز سیزدهم	۴۰۹۶ ریال
روز چهاردهم	۸۱۹۲ ریال

مرد پول‌دار با علاقه این پول‌ها را می‌پرداخت: آخر او تا حالا ۱۴ ملیون تومان پول گرفته بود و به‌جای آن کمی بیش از ۱۵۰۰ تومان

پرداخته بود.

ولی خوشحالی مرد پول‌دار خیلی طول نکشید: او متوجه شد،

شکل ۵۷. یک ملیون تومان از آسمان رسیده است ...

این مهمان عجیب، خیلی هم احمق نیست و این معامله آن‌طورها که در اول کار گمان می‌رفت، پرفایده نیست. وقتی که ۱۵ روز گذشت، در پرداخت مرد پول‌دار، دیگر رقم چند ریالی نبود، بلکه رقم یک هزار و ششصد تومان در پرداخت او پیدا شده بود؛ علاوه برآن این پرداخت‌ها به‌سرعت بالا می‌رفت. درحقیقت مرد پول‌دار در نیمهٔ دوم ماه این پول‌ها را پرداخت:

روز پانزدهم	۱۶۳۸۴ ریال
روز شانزدهم	۳۲۷۶۸ ریال
روز هفدهم	۶۵۵۳۶ ریال
روز هجدهم	۱۳۱۰۷۲ ریال
روز نوزدهم	۲۶۲۱۴۴ ریال

با وجود این هنوز گمان نمی‌کرد که دراین معامله ضرر بکند،

اگرچه تا حال بیش از ۵۰ هزار تومان پرداخته بود، ولی در عوض ۱۹ ملیون تومان گرفته بود.

ولی به‌سرعت، پرداخت او بالا می‌رفت. این پرداخت‌های بعدی او بود:

روز بیستم	۵۲۴۲۸۸ ریال
روز بیست و یکم	۱۰۴۸۵۷۶ ریال
روز بیست و دوم	۲۰۹۷۱۵۲ ریال
روز بیست و سوم	۴۱۹۴۳۰۴ ریال
روز بیست و چهارم	۸۳۸۸۶۰۸ ریال
روز بیست و پنجم	۱۶۷۷۷۲۱۶ ریال
روز بیست و ششم	۳۳۵۵۴۴۳۲ ریال
روز بیست و هفتم	۶۷۱۰۸۸۶۴ ریال

حال دیگر پرداخت خیلی بیشتر از دریافت شده بود؛ از طرف دیگر نمی‌شد معامله را درهمین‌جا قطع کرد، چون قرار براین بود که تا آخر معامله کسی قول خود را نشکند.

شکل ۵۸. مرد ناشناس او را گول زده بود.

بعد، وضع از این هم بدتر شد. ملیونر خیلی دیر فهمید که مرد ناشناس او را گول زده است و خیلی بیشتر از آن‌چه به‌او داده است از او پس گرفته است. با آمدن روز بیست هشتم مرد پول‌دار می‌بایستی قریب ۱۳ ملیون تومان بپردازد و دو روز آخر ملیونر را به‌کلی ورشکست کرد. این‌هاست بزرگ‌ترین رقم‌های پرداخت او:

روز بیست و هشتم ۱۳۴۲۱۷۷۲۸ ریال

روز بیست و نهم ۲۶۸۴۳۵۴۵۶ ریال

روز سی‌ام ۵۳۶۸۷۰۹۱۲ ریال

وقتی که مهمان برای آخرین‌بار رفت، ملیونر پیش خود حساب کرد که دریافت ۳۰ ملیون تومان برای او چقدر گران تمام شده است. معلوم شد، پرداخت به‌مرد ناشناس چنین بوده است:

۱۰۷۳۷۴۱۸۲۳ ریال

قریب به ۱۱۰ ملیون تومان! ... و این همه پول با یک ریال آغاز شد. حتا اگر مرد ناشناس روزی ۳ میلیون تومان هم می‌پرداخت باز چیزی از دست نمی‌داد.

III

قبل از این‌که داستان را تمام کنیم، روشی را بیان می‌کنیم که با کمک آن بتوان ضررهای ملیونر را با سرعت حساب کرد؛ به‌زبان دیگر، می‌خواهیم ببینیم که حاصل جمع رشته عددهایی از نوع زیر را به‌چه ترتیب می‌توان با سرعت به‌دست آورد:

$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ + ۶۴ + ...$$

به‌سادگی قانون زیر در مورد این‌عددها شناخته می‌شود:

۱ = ۱

۲ = ۱ + ۱

۴ = (۱ + ۲) + ۱

۸ = (۱ + ۲ + ۴) + ۱

۱۶ = (۱ + ۲ + ۴ + ۸) + ۱

۳۲ = (۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶) + ۱

....

می‌بینیم، هرعدد از این رشته برابر است با مجموع همهٔ عددهای پیش‌از خودش به‌اضافهٔ یک، بنابراین وقتی که بخواهیم همهٔ عددهای این رشته را، مثلاً از ۱ تا ۳۲۷۶۸ جمع کنیم؛ باید این عدد آخر را با تمام عددهای پیش از آن، یعنی با عددی که یک واحد کوچک‌تر از این عدد است، جمع کنیم:

۳۲۷۶۸ + ۳۲۷۶۷ = ۶۵۵۳۵

با اطلاع براین قاعده، اگر پرداخت آخرین روز میلیونر را بدانیم می‌توانیم جمع پرداخت ماهیانهٔ او را به‌سرعت حساب کنیم، آخرین پرداخت او ۵۳۶۸۷۰۹۱۲ ریال بود و بنابراین این به‌فوریت معلوم می‌شود که جمع پرداخت او ۱۰۷۳۷۴۱۸۲۳ ریال بوده است.

۶۰. سرعت انتشار شایعه

شگفتی‌آور است که خبر و شایعه، با چه سرعتی در شهر منتشر می‌شود! گاهی از زمانی که تنها چند نفر از یک خبر اطلاع داشته‌اند، حتا دو ساعت هم نمی‌گذرد که دیگر تمام شهر از آن مطلع شده‌اند؛ همه آن را شنیده‌اند. سرعت غیرعادی این انتشار، عجیب به‌نظر

می‌رسد، درست مثل یک معما.

ولی اگر وارد محاسبه شویم، روشن می‌شود که هیچ معمایی در این‌جا وجود ندارد: همه‌چیز مربوط به‌ویژگی‌های عددها است و هیچ جنبهٔ رمزآمیزی در خود شایعه و خبر وجود ندارد. به‌عنوان نمونه، این وضع را دربارهٔ حادثه‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

I

ساعت ۸ صبح، یکی از اهالی پای‌تخت، به‌یک شهر ۵۰ هزار نفری وارد می‌شود. او حامل یک خبر جدید است. در منزلی که او وارد می‌شود، فقط سه نفر از مردم شهر ساکن هستند و او این خبر را برای آن‌ها بازگو می‌کند، فرض کنیم، این‌کار یک‌ربع ساعت طول بکشد.

به‌این ترتیب، در ساعت (هشت و ربع) صبح ۴ نفر از مردم شهر از خبر جدید آگاه شده‌اند، یکی مسافر و سه نفر هم‌ساکنان منزل.

هریک از سه نفری که خبر جدید را شنیده‌اند، به‌نوبهٔ خود برای سه نفر دیگر از هم‌شهری‌هایشان بازگو می‌کنند و این هم یک ربع ساعت طول می‌کشد. بنابراین نیم ساعت بعد از ورود خبر جدید به‌شهر، تعداد $13 = (3 \times 3) + 4$ نفر از آن اطلاع دارند.

هریک از این ۹ نفری که تازه از خبر اطلاع پیدا کرده‌اند، دریک ربع ساعت بعد، با سه نفر دیگر از هم‌شهری‌هایشان صحبت می‌کنند و به‌این ترتیب در ساعت هشت و سه ربع صبح تعداد کسانی که از این خبر با اطلاع‌اند چنین است.

$$13 + (3 \times 9) = 40$$

شکل ۵۹. یکی از اهالی پای‌تخت خبر جالبی با خود آورده است.

اگر انتشار خبر را به‌همین طریق دنبال کنیم، یعنی فرد جدیدی که خبر را می‌شنود، در عرض یک ربع ساعت به‌سه نفر دیگر اطلاع دهد، تعداد افرادی از شهر که در ساعت‌های مختلف خبر را شنیده‌اند، به‌ترتیب زیر خواهد بود:

نفر ۱۲۱ = (۳ × ۲۷) + ۴۰ .... در ساعت ۹ صبح

نفر ۳۶۴ = (۳ × ۸۱) + ۱۲۱ .... درساعت ۹ و ربع صبح

نفر ۱۰۹۳ = (۳ × ۲۴۳) + ۳۶۴ .... در ساعت ۹ و نیم صبح

همان‌طور که می‌بینیم، بعد از گذشت یک ساعت و نیم از آغاز پخش خبر، تنها نزدیک ۱۱۰۰ نفر از اهالی آن را شنیده‌اند و این در مقابل جمعیت ۵۰ هزار نفری شهر، رقم جالب توجهی نیست. ممکن است این طور به‌نظر برسد که به‌این زودی‌ها همهٔ مردم شهر با خبر از جریان نخواهند شد. ولی به‌همین ترتیب انتشار خبر را دنبال کنیم:

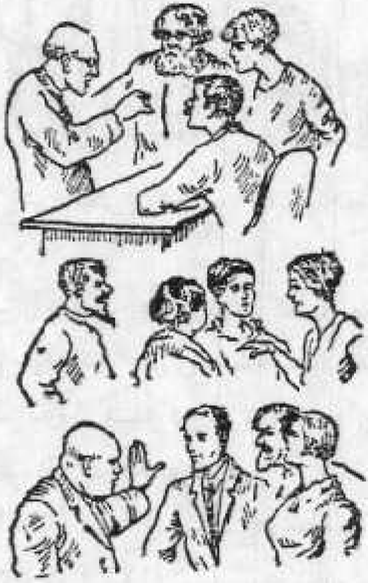
نفر ۳۲۸۰ = (۳ × ۷۲۹) + ۱۰۹۳ .... در ساعت ۹ و سه ربع صبح

....

نفر ۹۸۴۱ = (۳×۲۱۸۷) + ۳۲۸۰ ..... در ساعت ۱۰ صبح

و بعد از یک ربع ساعت دیگر بیشتر از نصف مردم شهر از خبر جدید، آگاه شده‌اند:

۹۸۴۱ + (۳×۶۵۶۱) = ۲۹۵۲۴



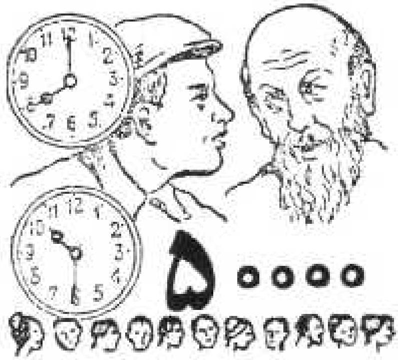
شکل ۶۰. هرکسی خبر جدید را با ۳ نفر درمیان می‌گذارد

و این به‌معنای آن است که در حدود ساعت ده و نیم، دیگر همهٔ مردم شهر بزرگ، خبری را که ساعت ۸ صبح تنها یک نفر از آن با اطلاع بوده، می‌دانند.

II

حالا ببینیم محاسبه‌های گذشته را چگونه انجام دادیم. در حقیقت عددهای زیر را با هم جمع کردیم:

۱ + ۳ + (۳ × ۳) + (۳ × ۳ × ۳) + (۳ × ۳ × ۳ × ۳) + ...



شکل ۶۱. در ساعت ۱۰/۵ صبح دیگر، همهٔ مردم شهر خبر جدید را شنیده‌اند.

آیا نمی‌توان این مجموع را، مثل مجموع عددهای:

۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ...

که قبلاً به‌دست آوردیم، به‌روش ساده‌ای معین کرد؟ به‌شرطی که ویژگی این عددها را، به‌شکلی که در زیر مشخص کرده‌ایم، در نظر بگیریم، می‌توان روش محاسبهٔ ساده را پیدا کرد:

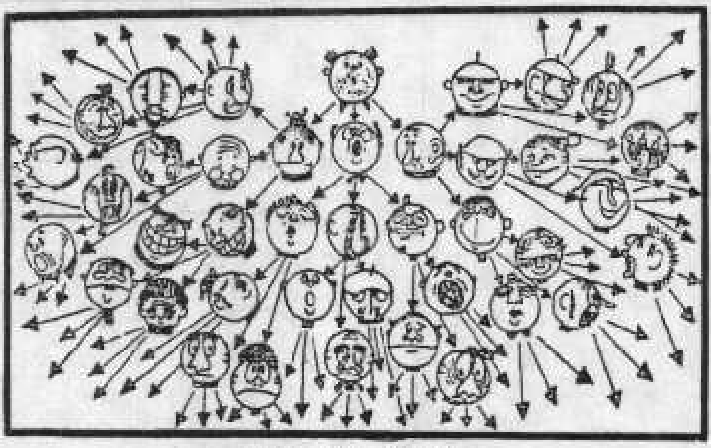
۱ = ۱

۳ = ۱ × ۲ + ۱

۹ = (۱ + ۳) × ۲ + ۱

۲۷ = (۱ + ۳ + ۹) × ۲ + ۱

۸۱ = (۱ + ۳ + ۹ + ۲۷) × ۲ + ۱



شکل ۶۲. راه انتشار شایعه

به‌زبان دیگر: هرعدد از این رشته برابر است با دو برابر مجموع تمام عددهای قبلی به‌اضافه یک. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر بخواهیم مجموع همهٔ عددهای این رشته را (تا هر عدد دل‌خواه) به‌دست آوریم، کافی است که به‌این عدد نصف خودش را اضافه کنیم (به‌شرطی که قبلاً یک واحد از آن کم کرده باشیم).

مثلاً مجموع عددهای:

$$۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ + ۸۱ + ۲۴۳ + ۷۲۹$$

برابر است با مجموع ۷۲۹ با نصف ۷۲۸ یعنی:

$$۷۲۹ + ۳۶۴ = ۱۰۹۳$$

در مثالی که آوردیم، هرکسی که از خبر جدید آگاهی پیدا می‌کرد، آن‌را تنها با سه نفر از هم‌شهری‌های خود درمیان می‌گذاشت. ولی اگر ساکنین را پرحرف‌تر فرض کنیم، به‌طوری‌که هریک از آن‌ها به‌جای ۳ نفر با ۵ نفر و یا حتی با ۱۰ نفر دیگر از خبر جدید صحبت می‌کرد، البته شایعه با سرعت بسیار بیشتری پراکنده می‌شد. اگر فرض را براین

بگذاریم که هرنفر با ۵ نفر دیگر شایعه را درمیان بگذارد، وضع پخش خبر بین اهالی شهر در ساعت‌های مختلف چنین بود:

۱ نفر =	در ساعت ۸ صبح
۶ نفر = ۵ + ۱	در ساعت ۸ و ربع صبح
۳۱ نفر = (۵ × ۵) + ۶	در ساعت ۸ و نیم صبح
۱۵۶ نفر = (۵ × ۲۵) + ۳۱	در ساعت ۸ و سه‌ربع صبح
۷۸۱ نفر = (۵ × ۱۲۵) + ۱۵۶	در ساعت ۹ صبح
۳۹۰۶ نفر = (۵ × ۶۲۵) + ۷۸۱	در ساعت ۹ و ربع صبح
۱۹۵۳۱ نفر = (۵ × ۳۱۵) + ۳۹۰۶	در ساعت ۹ و نیم صبح

و قبل از این‌که ساعت به ۹ و سه‌ربع برسد، همهٔ اهالی شهر از خبر جدید اطلاع خواهند داشت.

البته اگر هرکسی خبر جدیدی راکه می‌شنود با ۱۰ نفر درمیان بگذارد، شایعه با سرعت باز هم بیشتری پخش خواهد شد و دراین صورت رشته تصاعدی جالب زیر را خواهیم داشت:

۱ =	در ساعت ۸ صبح
۱۱ = ۱۰ + ۱	در ساعت ۸ و ربع
۱۱۱ = ۱۰۰ + ۱۱	در ساعت ۸ و نیم
۱۱۱۱ = ۱۰۰۰ + ۱۱۱	در ساعت ۸ و سه‌ربع
۱۱۱۱۱ = ۱۰۰۰۰ + ۱۱۱۱	در ساعت ۹ صبح

روشن است که عدد بعدی این رشته مساوی ۱۱۱۱۱۱ می‌باشد و این به‌معنای آن است که درآستانهٔ شروع ساعت ۱۰ صبح (بلافاصله بعد از ساعت ۹) همهٔ اهالی شهر از خبر جدید اطلاع خواهند داشت و شایعه در طول نزدیک یک ساعت همه‌جا را فرا می‌گیرد.

۶۱. دوچرخه‌های ارزان

درکشور ما، در سال‌های قبل از حکومت شوروی (به‌احتمالی هم اکنون در بعضی کشورهای دیگر) کسانی بودند که برای فروش کالاهای خود، دست به‌ابتکارهای جالبی می‌زدند. آن‌ها کار خود را از این جا آغاز می‌کردند که مثلاً در روزنامه‌ها و مجله‌های پر تیراژ آگهی زیر را تبلیغ می‌کردند:

دوچرخه با ۱۰ روبل

هرکس می‌تواند با پرداخت فقط ۱۰ روبل مالک یک دوچرخه بشود. از این موقعیت استفاده کنید.

به‌جای ۵۰ روبل فقط ۱۰ روبل

شرایط خرید به‌طور مجانی دراختیار شما گذاشته می‌شود.

کم نبودند کسانی که فریب این تبلیغ‌ها را می‌خوردند و خواهش می‌کردند که مؤسسه، شرایط این خرید غیرعادی را برای آن‌ها بفرستد.

آن‌ها درپاسخ تقاضای خود، اطلاع مختصری دریافت می‌داشتند که بنابرآن می‌فهمیدند:

برای آن‌ها در مقابل ۱۰ روبل دوچرخه فرستاده نمی‌شد، بلکه ۴ بلیت داده می‌شد که باید هریک از آن‌ها را به ۱۰ روبل به‌یکی از آشنایان خود بفروشند. ۴۰ روبل که به‌این ترتیب جمع می‌شد،باید

به‌مؤسسه تحویل داده می‌شد تا دوچرخه برای آن‌ها فرستاده شود. به‌این ترتیب به‌راستی، دوچرخه برای خریدار ۱۰ روبل تمام می‌شد. زیرا ۴۰ روبل بقیه را او از جیب خود نپرداخته بود.

در حقیقت، علاوه بر پرداخت ۱۰ روبل پول نقد، خریدار می‌بایستی زحمت فروش بلیت‌ها را به‌آشنایان خود تحمل کند، ولی این زحمت کوچک، به‌حساب نمی‌آمد.

موضوع این بلیت‌ها چه بود؟ کسی که آن‌ها را می‌خرید، در مقابل پرداخت ۱۰ روبل چه نفعی می‌برد؟ درحقیقت، صاحب هربلیت، این حق را داشت که در مؤسسه آن را با ۵ بلیت دیگر معاوضه کند، به‌دیگر سخن، می‌توانست این امکان را به‌دست آورد که ۵۰ روبل برای تهیهٔ دوچرخه فراهم کند، درحالی که در مقابل آن تنها ۱۰ روبل پرداخته بود (یعنی قیمت بلیت). صاحبان بلیت‌های جدید هم این حق را داشتند که در مقابل بلیت خود ۵ بلیت برای انتشار دریافت کنند و غیره.

در نگاه اول، هیچ‌گونه نیرنگی به‌چشم نمی‌خورد. وعدهٔ تبلیغ‌ها انجام می‌شد و دوچرخه برای خریدار، تنها ۱۰ روبل تمام می‌شد. مؤسسه هم دراین زمینه ضرر نمی‌کرد، زیرا درمقابل کالای خودش قیمت کامل آن را می‌گرفت.

ولی در حقیقت، همهٔ این بازی‌ها بدون تردید یک تقلب و حقه‌بازی است. این کلاه گذاری براین پایه است که در فروش بلیت آن قدرشریک واردمی‌کردند، که دیگرامکان فروش آن‌ها وجودنداشت. و هم این‌ها بودند که جریمهٔ اختلاف بین ۵۰ روبل قیمت دوچرخه و ۱۰ روبل پرداختی به‌مؤسسه را می‌پرداختند. دیر یا زود، ولی ناگزیر

زمان آن می‌رسید که دارندگان بلیت نمی‌توانستند برای بلیت‌های خود مشتری پیدا کنند. اگر زحمت این را به‌خودتان بدهید و با قلم و کاغذ حساب کنید که عده افراد با چه سرعتی زیاد می‌شود، می‌توانید به‌خوبی لحظهٔ فرارسیدن زمان توقف فروش بلیت‌ها را بفهمید.

اولین دستهٔ خریدار، که بلیت‌های خود را به‌طور مستقیم از مؤسسه می‌گیرد، تقریباً بدون هیچ زحمتی برای بلیت‌های خود خریدار پیدا می‌کند: هریک از اعضای این دسته نیز به‌نوبهٔ خود یک دستهٔ چهارنفری برای فروش بلیت‌ها به‌وجود می‌آورد.

این چهار نفر باید ۵ × ۴ یعنی ۲۰ خریدار برای بلیت‌های خود پیدا کنند و آن‌ها را متقاعد کنند که این خرید شامل سودهایی برای آن‌هاست. فرض می‌کنیم که دراین‌کار موفق شوند و ۲۰ خریدار برای خود پیدا کنند. «بهمن» جلو می‌رود. ۲۰ خریدار جدید باید بلیت‌های خود را به ۱۰۰ = ۵ × ۲۰ نفر دیگر بدهند.

تا حالا هرکدام از افرادی که برای بار اول به‌مؤسسه مراجعه کرده‌اند، در داخل «بهمنی» که تشکیل داده‌اند به‌اندازه:

$$1 + 4 + 20 + 100 = 125 \text{ نفر}$$

را گرد آورده‌اند. از این ۱۲۵ نفر تنها ۲۵ نفر دوچرخه خود را گرفته‌اند و ۱۰۰ نفر بقیه امیدوارند که به‌دوچرخه برسند و در مقابل این امید ۱۰ روبل پرداخته‌اند.

حالا دیگر «بهمن» از بین آشنایان نزدیک خارج می‌شود و به‌طرف شهر سرازیر می‌شود، جایی که پیداکردن آشنا و همراه، سخت و سخت‌تر می‌شود. ۱۰۰ نفر اخیر صاحب بلیت باید ۵۰۰ هم‌شهری جدید برای بلیت‌های خود پیدا کنند که آن‌ها هم به‌نوبهٔ خود، نیاز

به ۲۵۰۰ قربانی جدید دارند. شهر به‌سرعت از بلیت‌ها اشباع می‌شود و پیدا کردن داوطلب برای خرید بلیت کار بسیار مشکلی می‌شود.

می‌بینید که تعداد افراد جمع شده در این «بهمن»، به‌همان سرعتی پیش می‌رود که ما وقتی دربارهٔ انتشار شایعه صحبت می‌کردیم، با آن روبه‌رو شدیم.

این است هرم عددی که در این باره به‌دست می‌آید:

۱

۴

۲۰

۱۰۰

۵۰۰

۲۵۰۰

۱۲۵۰۰

۶۲۵۰۰

اگر شهری بزرگ باشد و تمام مردم شهر هم امکان دوچرخه‌سواری را داشته باشند، در دور هشتم ۶۲/۵ هزار نفر از جمعیت شهر را فرا می‌گیرد و دیگر باید «بهمن» تمام شود، چون همهٔ افراد در آن فرو رفته‌اند. ولی تنها $\frac{۱}{۵}$ آن‌ها صاحب دوچرخه شده‌اند و بقیهٔ $\frac{۴}{۵}$ در دست خود بلیت‌هایی دارند که نمی‌دانند آن‌ها را به‌چه کسی عرضه کنند. برای شهرهای با جمعیت زیادتر و حتا برای پای‌تخت‌هایی که جمعیت ملیونی دارد، زمان اشباع چند دور دیرتر فرا می‌رسد، زیرا تعداد افرادی که در «بهمن» جمع شده‌اند، با سرعت باورنکردنی رو به‌افزایش می‌گذارد.

قشرهای بعدی هرم عددی ما چنین است:

۳۱۲۵۰۰

۱۵۶۲۵۰۰

۷۸۱۲۵۰۰

۳۹۰۶۲۵۰۰

همان‌طور که می‌بینید «بهمن» می‌تواند در دور دوازدهم، جمعیت یک کشور بزرگ را، به‌طور کامل، در خود جمع کند که $\frac{۴}{۵}$ این جمعیت، گرفتار نیرنگ بانیان این «بهمن» شده‌اند.

حالا می‌بینیم که مؤسسه با به‌وجود آوردن این «بهمن» به‌چه نتیجه‌ای رسیده است. مؤسسه $\frac{۴}{۵}$ مردم را وادار به‌پرداخت پول کالا می‌کند، درحالی که خود کالا تنها به‌دست $\frac{۱}{۵}$ جمعیت می‌رسد. به‌دیگر سخن، این مؤسسه چهار نفر را مجبور می‌کند که جُور نفر پنجم را بکشند. علاوه‌براین، مؤسسه، به‌این ترتیب، تعداد زیادی کارمند فعال پیدا می‌کند، که به‌طور مجانی برای فروش کالا، فعالیت می‌کنند. اژدهای عدد، که زیر این کلاه‌برداری،خود را از دیدها پنهان کرده است، کسانی را تنبیه می‌کند، که نمی‌توانند با محاسبه‌های عددی برای حمایت از منافع خود، در مقابل حقه‌بازها، دفاع کنند.

۶۲. جایزه

این جریان مربوط به‌روایتی است که سده‌ها پیش، در روم قدیم، اتفاق افتاده است.[1]

۱. داستان با ترجمهٔ آزاد از یک رسالهٔ لاتینی قدیمی که متعلق به‌یکی از کتاب‌خانه‌های خصوصی انگلستان است، اقتباس شده است.

I

سرهنگ ترنتسی با حکم امپراتور، جنگ پیروزمندانه‌ای را به‌پایان رسانید و با غنیمت‌های جنگی به‌روم بازگشت، وقتی به‌پای تخت وارد شد، تقاضای ملاقات امپراتور را کرد.

امپراتور با مهربانی سرهنگ را پذیرفت، از صمیم قلب به‌خاطر خدمت‌های نظامی او به‌امپراتوری تشکر کرد و به‌او وعده داد، مقام مهمی را در سنا به‌او واگذارد.

ولی سرهنگ احتیاجی به‌این مقام نداشت و به‌این ترتیب اعتراض کرد: «پیروزی‌های زیادی به‌دست آوردم، تا امپراتور را به‌قدرت برسانم و نام او را قرین شهرت نمایم. من از مرگ ترس نداشتم و حتا اگر بیش از یک جان هم داشتم همه را قربانی امپراتور می‌کردم. ولی من از جنگ خسته شده‌ام، جوانی من از بین رفته است و خون در رگ‌هایم به‌کندی حرکت می‌کند. حالا دیگر موقع آن رسیده است که درخانهٔ اجدادی خودم به‌استراحت بپردازم و از خوشی‌های زندگی خانوادگی لذت ببرم.»

امپراتور پرسید: «پس از من چه می‌خواهی ترنتسی؟»

ـ «پادشاها! کمی به‌من گوش بدهید. در سال‌های دراز زندگی جنگی با وجودی که شمشیرم همیشه خونین بود، نتوانستم آسایش مالی برای خود فراهم کنم. قربان من فقیرم.»

ـ «ترنتسی شجاع به‌حرفت ادامه بده!»

سرهنگ که دلگرمی پیدا کرد، گفت: «اگر می‌خواهید جایزه‌ای به‌خدمت گزار خود بدهید، ترتیبی بدهید که با سخاوت شما بتوانم بقیهٔ عمر خود را به‌آسودگی و آرامش درکانون گرم خانواده‌ام

بگذارنم. من دنبال عنوان‌ها و مقام‌های عالی در سنا نیستم، من می‌خواهم از زندگی اجتماعی و دولتی کناره بگیرم و در آسایش کامل به‌سر ببرم. امپراتور می‌تواند پولی برای تأمین عمر من در نظر بگیرد.»

آن‌طور که از افسانه پیدا است، امپراتور میانهٔ چندانی با بذل و بخشش نداشت، او با علاقه پول‌ها را برای خودش جمع می‌کرد، ولی در موقع خرج، هرچه ممکن بود خست به‌خرج می‌داد. درخواست سرهنگ او را به‌فکر انداخت؛ و پرسید: «ترنتسی خیال می‌کنی چقدر پول برایت کافی باشد؟»

«یک ملیون دینار، سلطان!»

امپراتور، دوباره به‌فکر فرو رفت. سرهنگ سرش را پایین انداخت و منتظر ماند. سرانجام امپراتور به‌حرف آمد: «ترنتسی شجاع! تو جنگ‌جوی بزرگی هستی و شهرت فوق‌العادهٔ تو شایستهٔ هرگونه جایزه‌ای هست. من ترا ثروتمند می‌کنم. فردا ظهر از تصمیم من آگاه خواهی شد.»

سرهنگ ادای احترام کرد و خارج شد.

II

روز بعد، در ساعت مقرر سرهنگ در دربار امپراتور حاضر شد.

امپراتور گفت: «سلام برتو ترنتسی شجاع!»

ترنتسی با فروتنی سرش را پایین گرفت و گفت: «امپراتورا! من آمده‌ام تا از تصمیم شما آگاه شوم، شما با لطفی که نسبت به‌من دارید، مرا به‌پاداش بزرگی امیدوار کرده‌اید.»

امپراتور جواب داد: «نمی‌خواهم، جنگ‌جوی نجیبی مثل تو،

به‌خاطر شجاعت‌هایش جایزهٔ ناچیزی بگیرد. به‌من گوش بده: من در خزانه خودم ۵ ملیون «براس» مسی دارم. حالا به‌حرف‌های من توجه کن. تو به‌خزانه می‌روی، یک سکه دردست می‌گیری و آن را این‌جا می‌آوری و پهلوی تخت من می‌گذاری. روز بعد دوباره به‌خزانه می‌روی و یک سکه ۲ براسی می‌گیری و پهلوی سکهٔ اول قرار می‌دهی. روز سوم یک سکهٔ ۴ براسی، روز چهارم ۸ براسی و روز پنجم ۱۶ براسی با خودت می‌آوری و به‌همین ترتیب هرروز قیمت سکه را دو برابر می‌کنی. من دستور خواهم داد که هرروز سکه‌ای با اندازهٔ مناسب آماده کنند و تا وقتی که قدرت داشته باشی، سکه را از خزانهٔ من بیرون می‌آوری. هیچ‌کس حق ندارد به‌تو کمک کند و تو باید تنها از نیروی خودت استفاده کنی. وقتی، به‌نظرت رسید که نمی‌توانی سکهٔ بزرگ‌تری را بلند کنی، قرارداد ما تمام می‌شود. ولی همهٔ سکه‌هایی که موفق شده‌ای، بیرون بیاوری، به‌عنوان پاداش به‌خودت تعلق می‌گیرد.»

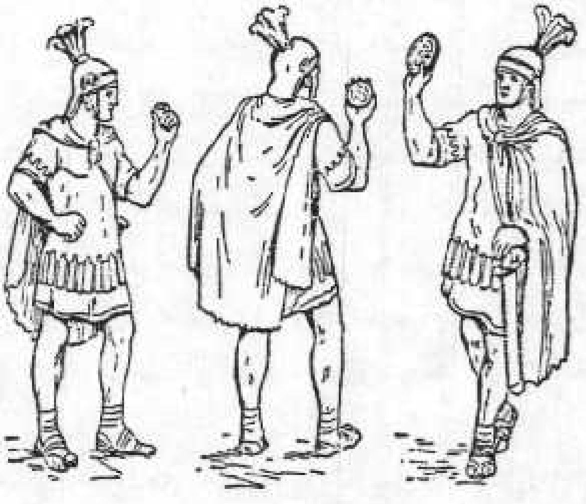
سرهنگ به‌حرف‌های امپراتور با ولع تمام گوش می‌داد، به‌نظرش می‌آمد که چگونه سکه‌های زیادی، یکی بزرگ‌تر از دیگری را از خزانهٔ سلطنتی خارج می‌کند وباتبسم جواب داد: «من ازلطف شما متشکرم، به‌راستی، هم جایزهٔ بزرگی است.»

رفت و آمد روزانهٔ ترنتسی به‌خزانه سلطنتی شروع شد. خزانه نزدیک سالن پذیرایی امپراتور بود، آوردن اولین سکه برای ترنتسی مستلزم صرف هیچ نیرویی نبود.

روز اول از خزانه تنها یک براس بیرون آورد. سکه یک براسی، سکه کوچکی به‌قطر ۲۱ میلی‌متر و وزن ۵ گرم بود.

انتقال دومین، سومین، چهارمین، پنجمین و ششمین سکه هم به‌سهولت انجام گرفت. وزن این سکه‌ها ۲، ۴، ۸، ۱۶ و ۳۲ برابر وزن سکهٔ اول بود.

سکه هفتم ۳۲۰ گرم وزن داشت و به‌قطر ۸/۵ سانتی‌متر (و یا دقیق‌تر ۸۴ میلی‌متر) بود[1].



شکل ۶۵. سکهٔ نهم　　شکل ۶۴. سکهٔ هفتم　　شکل ۶۳. سکهٔ اول

در روز هشتم ترنتسی سکه‌ای مساوی ۱۲۸ برابر براس از خزانه آورد که وزنش ۶۴۰ گرم و پهنایش ۱۰/۵ سانتی‌متر بود. روز نهم ترنتسی سکه‌ای مساوی ۲۵۶ براس به‌تالار امپراتوری آورد. این سکه

---

۱. وقتی، حجم سکه ۶۴ برابر اندازهٔ معمول بشود، پهنا و ضخامت آن تنها ۴ برابر می‌شود، زیرا ۶۴ = ۴ × ۴ × ۴. همین مطلب را باید برای اندازه‌های سکه در بقیهٔ داستان هم در نظر گرفت.

۱۳ سانتی‌متر پهنا و بیش از $۱\frac{۱}{۴}$ کیلوگرم وزن داشت.

روز دوازدهم سکه به‌پهنای نزدیک به ۲۷ سانتی‌متر و وزن $۱۰\frac{۱}{۴}$ کیلوگرم رسید.

امپراتور که تا این زمان با مهربانی به‌سرهنگ نگاه می‌کرد، حالا دیگر خوشحالی خود را پنهان نمی‌کرد، زیرا می‌دید، با وجودی که سرهنگ ۱۲ مرتبه پول با خود آورده است، تنها توانسته است کمی بیشتر از ۲۰۰۰ سکهٔ پول کوچک از خزانه بیرون آورد.

روز سیزدهم ترنتسی شجاع ۴۰۹۶ واحد پول به‌دست آورد که پهنای آن ۳۴ سانتی‌متر و وزن آن $۲۰\frac{۱}{۲}$ کیلوگرم بود.

شکل ۶۸. سکه پانزدهم شکل ۶۷. سکه سیزدهم شکل ۶۶. سکهٔ یازدهم

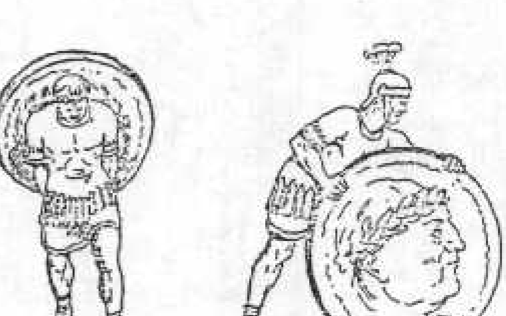
روز چهاردهم ترنتسی از خزانه سکه سنگینی به‌وزن ۴۱ کیلوگرم و به‌پهنای نزدیک به ۴۲ سانتی‌متر خارج کرد.

امپراتور درحالی که از خندهٔ خود جلوگیری می‌کرد، پرسید: «ترنتسی شجاع! خسته نشده‌ای؟»

سرهنگ درحالی که عرق پیشانیش را پاک می‌کرد، با حالت گرفته‌ای جواب داد: «نه سلطان من!»

روز پانزدهم فرا رسید. بار ترنتسی این دفعه سنگین بود. او سکهٔ خود را که ۱۶۳۸۴ برابر واحد پول بود به‌سختی پیش امپراتور برد. این سکه، ۵۳ سانتی‌متر پهنا و ۸۲ کیلوگرم وزن داشت. به‌وزن یک جنگ‌جوی کامل.

روز شانزدهم، سرهنگ بار خود را روی پشتش گذاشت و تلوتلوخوران آن را به‌تالار آورد. این سکه ۳۲۸۶۸ برابر واحد پول بود. به‌وزن ۱۶۴ کیلو ۱۶۴ گرم و پهنای ۶۷ سانتی‌متر.



شکل ۷۰. سکهٔ هفدهم   شکل ۶۹. سکهٔ شانزدهم

سرهنگ نیروی خود را از دست داده بود و به‌سختی نفس‌نفس

کند، آن را می‌غلتاند و به‌جلو می‌برد. سکهٔ دیگر ۸۴ سانتی‌متر پهنا و ۳۲۸ کیلوگرم وزن داشت. این سکه ۶۵۵۳۶ برابر واحد پول بود.

روز هیجدهم آخرین روز پول‌دارشدن سرهنگ بود. این آخرین سفر او از خزانه به‌تالار امپراتور بود. سکهٔ روز هجدهم ۱۳۱۰۷۲ برابر واحد پول بود. پهنای این سکه بیش از یک متر و وزن آن ۶۵۵ کیلوگرم بود. ترنتسی با استفاده از نیزهٔ خودش به‌عنوان اهرم و به کار بردن تمام زور خود توانست سکه را به‌طرف تالار امپراتور بغلتاند. سکهٔ عظیم با صدای گوشخراشی پهلوی امپراتور افتاد. ترنتسی دیگر به‌راستی به‌ستوه آمده بود؛ زمزمه کرد: «بیش از این نمی‌توانم! کافی است.»

شکل ۷۱. سکه هجدهم

امپراتور به‌سختی توانست شادی خود را پنهان کند، می‌دید که نیرنگ او به‌طور کامل به‌انجام رسیده است. به‌خزانه‌دار دستور داد که مقدار پولی را که ترنتسی به‌تالار پذیرایی آورده است، حساب کند. خزانه‌دار ماموریت را انجام داد و گفت:

ـ سلطان! با سخاوت شما ترنتسی سرباز شجاع و پیروز ۲۶۲۱۴۳ براس جایزه گرفت.

به‌این ترتیب، امپراتور خسیس نزدیک به یک بیستم مبلغ یک ملیون دیناری راکه ترنتسی خواسته بود، به او پرداخت.

***

محاسبهٔ خزانه‌دار را رسیدگی کنیم و درضمن، وزن سکه‌ها را هم محاسبه نماییم: ترنتسی در روزهای متوالی این سکه‌ها را با خود آورده است:

روز اول	۱	براس به‌وزن ۵ گرم
روز دوم	۲	براس به‌وزن ۱۰ گرم
روز سوم	۴	براس به‌وزن ۲۰ گرم
روز چهارم	۸	براس به‌وزن ۴۰ گرم
روز پنجم	۱۶	براس به‌وزن ۸۰ گرم
روز ششم	۳۲	براس به‌وزن ۱۶۰ گرم
روز هفتم	۶۴	براس به‌وزن ۳۲۰ گرم
روز هشتم	۱۲۸	براس به‌وزن ۶۴۰ گرم
روز نهم	۲۵۶	براس به‌وزن ۱ کیلوگرم و ۲۸۰ گرم
روز دهم	۵۱۲	براس به‌وزن ۲ کیلوگرم و ۵۶۰ گرم
روز یازدهم	۱۰۲۴	براس به‌وزن ۵ کیلوگرم و ۱۲۰ گرم
روز دوازدهم	۲۰۴۸	براس به‌وزن ۱۰ کیلوگرم و ۲۴۰ گرم
روز سیزدهم	۴۰۹۶	براس به‌وزن ۲۰ کیلوگرم و ۴۸۰ گرم
روز چهاردهم	۸۱۹۲	براس به‌وزن ۴۰ کیلوگرم و ۹۶۰ گرم
روز پانزدهم	۱۶۳۸۴	براس به‌وزن ۸۱ کیلوگرم و ۹۲۰ گرم

روز شانزدهم	۳۲۷۶۸	براس به‌وزن ۱۶۳ کیلوگرم و ۸۴۰ گرم
روز هفدهم	۶۵۵۳۶	براس به‌وزن ۳۲۷ کیلوگرم و ۶۸۰ گرم
روز هجدهم	۱۳۱۰۷۲	براس به‌وزن ۶۵۵ کیلوگرم و ۳۶۰ گرم

ما دیگر می‌دانیم که چطور می‌توان به‌سادگی مجموع رشته عددهایی از این قبیل را به‌دست آورد. مجموع عددهای ستون دوم طبق قاعده‌ای که قبلاً دیده‌ایم مساوی ۲۶۲۱۴۳ می‌شود. ترنتسی از امپرطور یک میلیون دینار، یعنی ۵۰۰۰۰۰۰ براس خواسته بود و به‌این ترتیب آن‌چه که گرفت ۱۹ مرتبه کمتر از تقاضای او بود:

۵۰۰۰۰۰۰ : ۲۶۲۱۴۳ # ۱۹

۶۳. افسانه‌ای دربارهٔ صفحهٔ شطرنج

شطرنج یکی از بازی‌های خیلی قدیمی است. سده‌های زیادی است که این بازی معمول است و بنابراین طبیعی است که افسانه‌های زیادی دربارهٔ آن رواج داشته باشد. درستی این افسانه‌ها را هم با توجه به‌عمر طولانی آن‌ها، نمی‌توان تحقیق کرد.

ما هم می‌خواهیم یکی از این افسانه‌ها را نقل کنیم. برای فهمیدن این داستان نیازی به‌دانستن بازی شطرنج نیست، بلکه کافی است بدانیم شطرنج را روی صفحه‌ای بازی می‌کنند که ۶۴ خانه مربع‌شکل دارد (که به‌تناوب سیاه و سفید هستند).

I

بازی شطرنج در هند کشف شد و وقتی که حاکم هند با آن آشنا شد، ریزه‌کاری‌های آن و تنوع فوق‌العادهٔ آن را مورد تحسین قرار داد.

وقتی حاکم فهمید یکی از اتباع هند این بازی را کشف کرده است، دستور داد او را بخواهند تا به‌خاطر موفقیتی که به‌دست آورده است هدیهٔ مناسبی به‌او بدهند.

مخترع شطرنج (که نامش «ستا» بود) به‌دربار حاکم آمد. مخترع دانشمندی بود با لباس ساده که زندگی خود را با کمک شاگردانی که داشت، تأمین می‌کرد.

حاکم گفت: «ستا، می‌خواهم به‌خاطر بازی بی‌نظیری که اختراع کرده‌ای، پاداش با ارزشی به‌تو بدهم.»

ستا ساکت بود. شاه او را تشویق کرد. «خجالت نکش! آرزویت را بگو. از انجام هیچ‌کاری دریغ نخواهم داشت.»

شکل ۷۲. «دستور دهید که به‌خاطر خانه دوم شطرنج دو دانه گندم بپردازند»

ـ «محبت حاکم خیلی زیاد است، ولی مهلتی بدهید تا دراین‌باره فکرکنم. فردا، بعدازآن‌که فکرکردم، می‌توانم خواهش خودرابیان کنم.»

فردا، وقتی که ستا دوباره به‌پلکان تخت نزدیک شد، حاکم را از خواهش کوچک خودش بی‌اندازه متعجب کرد:

ستا گفت: «دستور بدهید که برای خانهٔ اول صفحهٔ شطرنج یک دانه گندم به‌من بدهند.»

شاه با تعجب پرسید: «یک دانه گندم معمولی؟»

«بله حاکم! امر کنید برای خانهٔ دوم دو عدد، برای خانهٔ سوم ۴، برای خانهٔ چهارم ۸، برای خانهٔ پنجم ۱۶ و برای خانه ششم ۳۲ دانه گندم و...».

شکل ۷۳. «ستا دم در قصر منتظر ماند»

شاه با اوقات تلخی حرف او را قطع کرد: «کافی است! طبق میل خودت برای هر ۶۴ خانهٔ شطرنج به‌تو گندم خواهند داد. برای هرخانه دو برابر خانهٔ قبل. ولی این را بدان که خواهش تو به‌اندازهٔ سخاوت من نبود. تو با خواستن پاداشی به‌این کوچکی با بی‌احترامی، به‌محبت من، بی‌اعتنایی کردی. درحقیقت، تو می‌توانستی بهترین نمونهٔ احترام را به‌محبت‌های پادشاه خودت، نشان دهی. خوب دیگر، برو، مستخدمین من گونی گندم تو را برایت خواهند آورد.

ستا لبخندی زد و از تالار خارج شد و دم در قصر منتظر ماند.

II

موقع نهار، حاکم از مخترع شطرنج یاد کرد و کسی را فرستاد تا اطلاع حاصل کند که آیا ستای بی‌شعور جایزهٔ محقر خود را گرفته است یا نه؟

جواب دادند: «حاکم، دستور شما را اجرا می‌کنند، ریاضی‌دان‌های درباری دارند تعداد گندم‌ها را محاسبه می‌کنند.»

اوقات حاکم تلخ شد، او عادت نداشت که اجرای دستورش را این‌قدر به‌تأخیر بیندازند.

عصر، وقتی که حاکم می‌خواست استراحت کند، دوباره پرسید: «آیا خیلی وقت است که ستا باگونی گندمش، حصار قصر را ترک کرده است؟»

جواب دادند: «حاکم بزرگ! ریاضی‌دان‌ها بدون خستگی مشغول هستند و امیدوارند قبل از سپیده‌دم کار محاسبه را به‌پایان برسانند.»

حاکم با خشم فریاد زد: «چرا این‌کار را این قدر به‌عقب می‌اندازید؟ فردا قبل از آن که من بیدار شوم، باید تا آخرین دانهٔ گندم به‌ستا داده شود. من هرگز دو مرتبه دستور نمی‌دهم».

شکل ۷۴. ریاضی‌دان‌ها بدون خستگی کار می‌کردند.

صبح، به‌حاکم اطلاع دادند که نماینده ریاضی‌دان‌های درباری می‌خواهد جریان مهمی را به‌اطلاع برساند.

حاکم امر کرد او را داخل کنند. پس از آن که ریاضی‌دان وارد شد، حاکم با تندی گفت: «قبل از آن‌که بخواهی دربارهٔ کار خودت صحبت کنی، می‌خواهم بدانم، آیا سرانجام جایزهٔ ناقابلی را که ستا معین کرده بود به‌او داده‌اید؟»

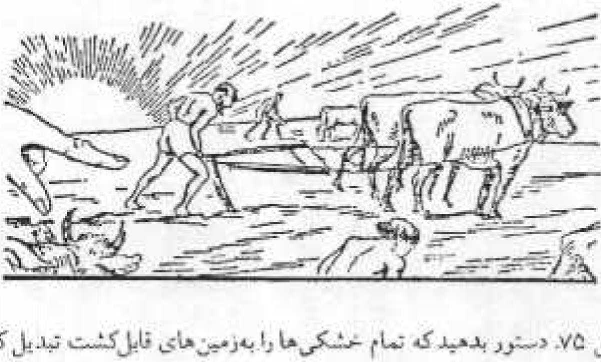
پیرمرد جواب داد: «به‌خاطر همین مطلب است که به‌خود جرأت دادم صبح به‌این زودی مزاحم شوم. ما به‌درستی، مقدار گندم‌هایی را که ستا خواسته است، حساب کردیم. عدد بسیار بزرگی به‌دست آمده است ...»

حاکم با غرور حرف او را قطع کرد: «هرچقدر زیاد بشود، گمان نمی‌کنم لطمهٔ زیادی به‌ذخیرهٔ انبار ما بزند، جایزه‌ای که وعده داده‌ایم باید به‌طور کامل داده شود ...»

«انجام چنین خواهشی در قدرت شما نیست. در تمام انبارهای شما به‌اندازه‌ای که ستا خواسته است گندم وجود ندارد. این مقدار گندم، حتا در سراسر جهان هم پیدا نمی‌شود و اگر شما بخواهید، حتماً به‌وعدهٔ خود وفا کنید، باید دستور بدهید تا تمام خشکی‌ها را به‌زمین‌های قابل‌کشت تبدیل کنند، تمام یخ‌ها و برف‌های سرزمین‌های دوردست شمالی را آب کنند و همهٔ آن زمین‌ها را بکارند و همهٔ محصولی را که از این راه به‌دست می‌آید به‌ستا بدهید. تنها دراین صورت است که می‌توانید جایزهٔ او را بدهید.»

حاکم با تعجب به‌سخنان مرد سالخورده گوش می‌کرد و در حال فکر پرسید: «به‌من بگویید این عدد وحشت‌آور چقدر است؟»

«هیجده کوینتلیون، چهارصد و چهل و شش کاتریلیون، هفتصد و چهل و چهار تریلیون، هفتاد و سه بلیون، هفتصد و نه‌ملیون و پانصد و



شکل ۷۵. دستور بدهید که تمام خشکی‌ها را به‌زمین‌های قابل‌کشت تبدیل کنند.

پنجاه و یک‌هزار و ششصد و پانزده دانه. حاکم بزرگ!»

III

افسانه چنین است. آیا واقعاً داستان به‌همین شکل که نقل کرده‌ایم اتفاق افتاده است؟ کسی نمی‌داند. ولی جایزه‌ای که در این افسانه از آن نام برده شده است، همین مقدار است و شما می‌توانید خودتان حساب کنید. و متقاعد شوید. با شروع از یک باید عددهای: ۱، ۲، ۴، ۸ و غیره را جمع کنیم. اگر ۶۳ بار به‌طور متوالی، دو برابرکردن را ادامه دهیم، تعداد گندم‌هایی که باید در شصت و چهارمین خانهٔ شطرنج قرار دهیم، به‌دست می‌آید. همان‌طور که قبلاً هم دیدیم می‌توان این عدد به‌دست آمده را دو برابر و سپس یک واحد از آن کم کرد، تا مجموع تمام گندم‌هایی که باید به‌مخترع شطرنج داده شود، به‌دست آید. بنابراین، مطلب به‌این‌جا منجر می‌شود که عدد ۲ را ۶۴ مرتبه در خودش ضرب کنیم:

۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ... (۶۴ مرتبه)

برای سادگی محاسبه می‌توان این ضرب را به‌این صورت انجام داد که آن را به ۷ دسته ضرب تبدیل کرد:

در ۶ دستهٔ اول ۱۰ عامل ضرب ۲ و در دسته آخر ۴ عامل ۲ وجود خواهد داشت. به‌سادگی روشن می‌شود که اگر ۲ را ۱۰ بار در خودش ضرب کنیم ۱۰۲۴ و اگر ۴ بار در خودش ضرب کنیم ۱۶ به‌دست می‌آید. یعنی نتیجهٔ موردنظر چنین است:

۱۶ × ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴

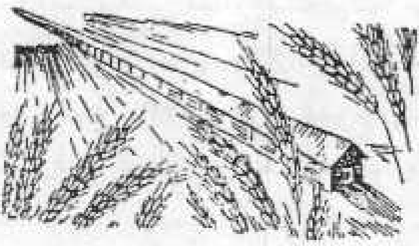
۱۰۲۴ را در ۱۰۲۴ ضرب می‌کنیم، عدد ۱۰۴۸۵۷۶ به‌دست

می‌آید. اکنون باید حاصل‌ضرب زیر را پیدا کرد:

۱۰۴۸۵۷۶ × ۱۰۴۸۵۷۶ × ۱۰۴۸۵۷۶ × ۱۶

که اگر از حاصل این ضرب یک واحد کم کنیم، تعداد گندم‌های مجهول به‌دست خواهد آمد:

۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵



شکل ۷۶. «انبار از خورشید هم دورتر می‌رفت»

اگر بخواهید بزرگی این عدد را پیش خود مجسم کنید، باید ابتدا، بزرگی انباری را در نظر بگیرید، که این مقدار گندم را در خود جای می‌دهد! هرمتر مکعب قریب ۱۵ ملیون گندم می‌تواند در خود جا دهد. یعنی جایزهٔ مخترع شطرنج به‌اندازهٔ ۱۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ متر مکعب یا ۱۲۰۰۰ کیلومتر مکعب، جا لازم دارد.

اگر ارتفاع انبار را ۴ متر و عرض آن را ۱۰ متر بگیریم، طول چنین انباری مساوی ۳۰۰۰۰۰۰۰۰ کیلومتر، یعنی دو برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید خواهد شد.

حاکم هند، قدرت پرداخت چنین جایزه‌ای را نداشت، ولی اگر ریاضی می‌دانست، می‌توانست خود را از زیر بار این قرض سنگین، خلاص کند. کافی بود به‌ستا پیشنهاد کند که خودش گندم‌ها را بشمارد

و تحویل بگیرد.

درحقیقت، اگر سنا شب و روز بدون خستگی، شمردن را ادامه می‌داد، و اگر برای شمردن هرعدد گندم، یک ثانیه زمان لازم باشد، دراولین شبانه‌روز فقط ۸۶۴۰۰ گندم خواهد شمرد و برای این‌که بتواند یک میلیون گندم را بشمارد، لازم بود که لااقل ۱۰ شبانه‌روز بدون استراحت، شمردن را ادامه دهد. یک متر مکعب گندم، فریب نصف سال وقت نیاز دارد و بنابراین در جریان ۱۰ سال می‌تواند کمتر از ۲۰ متر مکعب گندم را بشمارد و به‌این ترتیب می‌بینید که اگر سنا تمام بقیهٔ عمر خودش را هم به‌شمردن گندم‌ها بگذراند، تنها می‌تواند قسمت خیلی کوچکی از جایزه‌اش را دریافت کند.

۶۴. سرعت تکثیر

میوهٔ رسیدهٔ خشخاش پر از دانه‌های ریز است و هریک از این دانه‌ها می‌تواند به‌نوبهٔ خودگیاه کامل شود. اگر همهٔ دانه‌های یک میوه سبز شود، چند خشخاش خواهیم داشت؟ برای این‌که پاسخ این پرسش را بدهیم، باید تعداد دانه‌های هرمیوهٔ خشخاش را بدانیم. این البته مشغولیت کسل‌کننده‌ای است، ولی نتیجهٔ آن ارزش این را دارد که تحمل کنیم و محاسبه را به‌آخر برسانیم. هرمیوهٔ خشخاش (اگر بخواهیم عدد خوبی داشته باشیم) نزدیک به‌۳۰۰۰ دانه خشخاش دارد.

از این جا چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟ اگر اطراف این میوهٔ خشخاش، زمین وسیع و مناسبی وجود داشته باشد، هردانهٔ آن جوانه‌ای می‌دهد و درتابستان آینده ۳۰۰۰ خشخاش خواهیم داشت:

شکل ۷۷. اگر تمام دانه‌های خشخاش را بکارند، چقدر خشخاش به‌دست می‌آید؟

مزرعهٔ کاملی از خشخاش با میوهٔ آن به‌دست می‌آید. ببینیم چه می‌شود؟

هرکدام از این ۳۰۰۰ بوته، لااقل یک میوه خواهد داشت (وگاهی هم بیشتر) و بنابراین هرکدام آن‌ها شامل ۳۰۰۰ دانه خواهد بود. بعد از کاشتن دانه‌های جدید، هریک از میوه‌ها به‌نوبهٔ خود ۳۰۰۰ بوتهٔ جدید می‌دهند و بنابراین در سال دوم حداقل:

$$۳۰۰۰ \times ۳۰۰۰ = ۹۰۰۰۰۰۰$$

بوته خواهیم داشت.

به‌سادگی می‌توان حساب کرد که در سال سوم تعداد اخلاف تنها میوه خشخاشی که داشتیم، مساوی:

$$۹۰۰۰۰۰۰ \times ۳۰۰۰ = ۲۷۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

بوته خشخاش خواهد بود.

و در سال چهارم:

$$۲۷۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۳۰۰۰ = ۸۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

ولی در سال پنجم، کره زمین برای رشد خشخاش‌های ما تنگ خواهد بود، زیرا تعداد بوته‌ها مساوی:

$$۸۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۳۰۰۰ = ۲۴۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

خواهد بود، درحالی که سطح همهٔ خشکی‌ها یعنی همهٔ قاره‌ها و جزیره‌های کرهٔ زمین فقط ۱۳۵ میلیون کیلومتر مربع است. یعنی:

$$۱۳۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ m^۲$$

که تقریباً ۲۰۰۰ مرتبه کوچکتر از تعدا خشخاش‌هائی است که روییده است.

می‌بینید که اگر همهٔ دانه‌های خشخاش سبز شوند، نسل یک میوهٔ آن می‌تواند بعد از پنج سال تمام سطح زمین را چنان بپوشاند که در هرمتر مربع آن ۲۰۰۰ بوته وجود داشته باشد. ببینید چه عدد بزرگی

شکل ۷۸ . گل قاصد، هرسال قریب ۱۰۰ تخم می‌آورد.

زیر دانهٔ کوچک خشخاش پنهان شده است!

اگر به‌جای خشخاش همین حساب را در مورد گیاه دیگری هم که تخم کمتری دارد، انجام دهیم، به‌همین نتیجه خواهیم رسید، منتهی به‌جای ۵ سال، وقت بیشتری لازم دارد تا تمام سطح زمین را بپوشاند.

مثلاً «گل قاصد» را در نظر بگیریم که درهرسال نزدیک به‌صد تخم می‌آورد[1]. اگر همهٔ تخم‌ها می‌رویید، عددهای زیر را داشتیم:

در سال اول	ـــــــ	۱
در سال دوم	ـــــــ	۱۰۰
در سال سوم	ـــــــ	۱۰۰۰۰
در سال چهارم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰
در سال پنجم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰۰۰
در سال ششم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
در سال هفتم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
در سال هشتم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
در سال نهم	ـــــــ	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

و این ۷۰ برابر بزرگتر از سطح زمین برحسب متر مربع است. بنابراین درسال نهم تمام سطح زمین پوشیده از «گل قاصد» خواهد بود و درهر متر مربع آن ۷۰ بوته وجود خواهد داشت.

پس چرا این تکثیر سریع وحشتناک را درعالم واقع نمی‌بینیم؟ برای این‌که تعداد زیادی از تخم‌ها بدون این‌که جوانه بدهند از بین می‌روند و یا در زمین مناسب قرار نمی‌گیرند و یا به‌وسیلهٔ سایر نباتات خفه می‌شوند و یا سرانجام به‌سادگی به‌وسیلهٔ حیوانات معدوم

۱. دریک میوهٔ «گل قاصد» حتی تا ۲۰۰ تخم هم شمرده‌اند.

می‌شوند. ولی اگر این نابودی دسته‌جمعی بذرها و جوانه‌ها انجام نمی‌گرفت، هریک از این گیاه‌ها می‌توانست در مدت کوتاهی سیارهٔ ما را به‌کلی بپوشاند.

این مطلب تنها در مورد گیاهان نیست و درباره جانوران هم صدق می‌کند. اگر مرگ نبود، نسل یک جفت از هرحیوانی می‌توانست دیر یا زود، زمین را پر کند. دستهٔ ملخی که سرزمین وسیعی را از وجود خود پوشانده است، می‌تواند تصوری از این مطلب به‌ما بدهد که اگر مرگ مانع تکثیر موجودات زنده نمی‌شد، چه وضعی پیش می‌آمد: در مدت بین ۲۰ تا ۳۰ سال تمام قاره‌ها، جنگل‌های غیرقابل عبور و استپ‌ها مملو از ملیون‌ها حیوان زنده می‌شد، که برای جا با یکدیگر در زد و خورد بودند، اقیانوس‌ها چنان از ماهی‌ها پر می‌شد که کشتی‌رانی غیرممکن می‌شد و فضا چنان پر از پرنده‌ها و حشرات می‌شد که به‌کلی شفافیت خود را از دست می‌داد.

شکل ۷۹. هوا شفافیت خود را به‌خاطر تکثیر زیاد پرندگان از دست می‌داد.

به‌عنوان مثال، تکثیر همین مگس خانگی را که همه می‌شناسیم مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید که هرمگس ۱۲۰ تخم بگذارد و فرض کنید درجریان تابستان ۷ نسل مگس به‌وجود آید که نصف آن‌ها مگس‌های ماده باشند. اولین تخم‌گذاری را ۲۵ فروردین در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ۲۰ روز طول بکشد تا مگس ماده،بتواندبه‌طور مستقل تخم‌گذاری کند. دراین‌صورت، تکثیر به‌ترتیب زیر خواهد بود:

۲۵ فروردین: مگس ماده ۱۲۰ تخم می‌گذارد، ۱۰ اردیبهشت ۱۲۰ مگس از آن‌ها خارج می‌شود که ۶۰ تای آن‌ها ماده است.

۱۴ اردیبهشت: هریک از مگس‌های مادهٔ جدید ۱۲۰ تخم می‌گذارد، در اواخر اردیبهشت ۷۲۰۰ = ۱۲۰ × ۶۰ مگس از این تخم‌ها بیرون می‌آید که ۳۶۰۰ عدد آن‌ها مگس ماده است.

۳ خرداد: هریک از ۳۶۰۰ مگس ماده ۱۲۰ تخم می‌گذارد، میانه‌های خرداد ۴۳۲۰۰۰ = ۱۲۰ × ۳۶۰۰ مگس پیدا خواهد شد که از آن‌ها ۲۱۶۰۰۰ مگس ماده است.

۲۳ خرداد: هریک از ۲۱۶۰۰۰ مگس ماده، ۱۲۰ تخم می‌گذارد، در اوایل تیر ۲۵۹۲۰۰۰۰ مگس خواهد بود که از آن‌ها ۱۲۹۶۰۰۰۰ مگس ماده است.

۱۲ تیر: هریک از ۱۲۹۶۰۰۰۰ مگس ماده ۱۲۰ تخم می‌گذارد، که از آن‌ها ۱۵۵۵۲۰۰۰۰۰ مگس خارج می‌شود که ۷۷۷۶۰۰۰۰۰ مگس ماده است.

اول مرداد: ۹۳۳۱۲۰۰۰۰۰۰ مگس خارج می‌شود که از بین آن‌ها ۴۶۶۵۶۰۰۰۰۰۰ مگس ماده است.

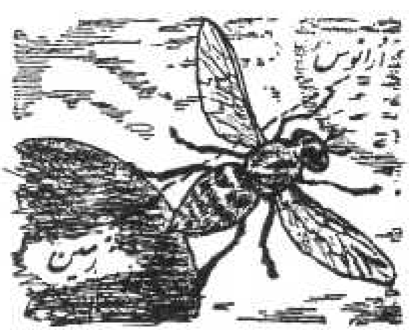
۲۰ مرداد: ۵۵۹۸۷۲۰۰۰۰۰۰۰ مگس خارج می‌شود که ۲۷۹۹۳۶۰۰۰۰۰۰۰ آن‌ها مگس ماده است.

۹ شهریور: ۳۵۵۹۲۳۲۰۰۰۰۰۰۰۰ مگس جدید به‌وجود می‌آید.

برای این‌که بتوانیم پیش خود روشن‌تر مجسم کنیم، که اگر جلو تولید یک جفت مگس در جریان یک تابستان، مانعی وجود نداشته باشد، چه تودهٔ عظیمی از مگس به‌وجود می‌آید، فرض می‌کنیم که مگس‌ها پشت‌سرهم، یکی پس از دیگری صف کشیده باشند. اگر طول هرمگس را ۵ میلی‌متر بگیریم، دراین‌صورت ۲۵۰۰ ملیون کیلومتر یعنی ۱۸ برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید را به‌دست می‌آوریم. (یعنی نزدیک به فاصلهٔ زمین تا سیارهٔ اورانوس).

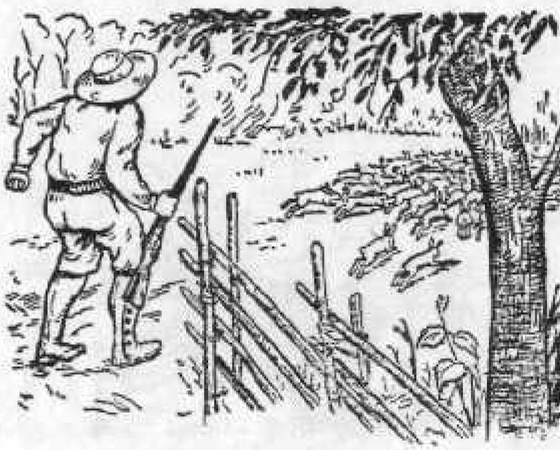
در خاتمه چند حادثهٔ واقعی را در مورد تکثیر سریع و غیرعادی جانورانی که در محیط مناسب قرار گرفته‌اند، ذکر می‌کنیم:

در آمریکا ابتدا گنجشک نبود. این پرنده را که برای ما این‌قدر معمولی است، برای از بین‌بردن حشرات موذی، از خارج، به‌ایالات



شکل ۸۰. اعقاب یک جفت مگس می‌توانند در جریان یک تابستان آن‌قدر زیاد شوند که خطی از زمین تا اورانوس به‌وجود آورند.

متحد؛ آمریکا وارد کردند. همان‌طور که می دانیم، گنجشک با خوردن کرم درخت و سایر حشراتی که برای باغ‌ها و جالیزها ضرر دارند، به‌طور وسیع، آن‌ها را از بین می‌برد. محیط آمریکا برای گنجشک بسیار مساعد بود، زیرا درآن‌جا پرندگان گوشت‌خواری که آن‌ها را نابود کنند، وجود نداشت و به‌همین مناسبت، به‌سرعت تعداد گنجشک‌ها زیاد شد. در مقابل، تعداد حشرات موذی بسیار کم شد. ازدیاد گنجشک‌ها وکم‌شدن حشرات موذی، تا آن‌جا ادامه داشت که دیگر حشره‌ای برای تغذیهٔ گنجشک‌ها پیدا نمی‌شد. حالا دیگر گنجشک‌ها به طرف گیاه‌ها و بذرها هجوم آوردند[1]. دوران جنگ با گنجشک فرا رسید. این مبارزه به‌قدری برای آمریکا گران تمام شد که بعدها منجر به‌وضع قانونی برای ممانعت از آوردن هرگونه حیوانی، به‌آمریکا شد.



شکل ۸۱. گله‌های خرگوش سرتاسر استرالیا را فرا گرفت.

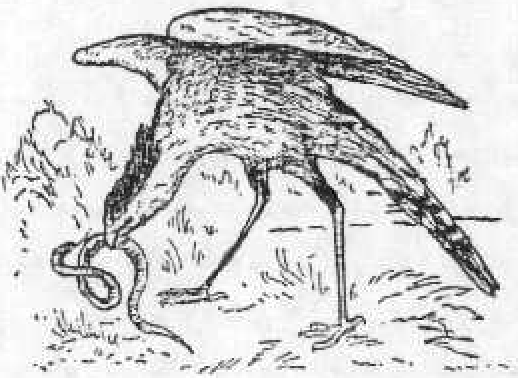
۱. در جزیرهٔ هاوائی تمام پرندگان کوچک را بیرون کردند.

نمونهٔ دوم: در قارهٔ استرالیا، وقتی، به‌وسیلهٔ اروپایی‌ها کشف شد، خرگوش وجود نداشت. خرگوش را در سدهٔ هجدهم به‌استرالیاآوردند و ازآن‌جا که حیوانات درنده‌ای وجود نداشت، این حیوان جَونده، با سرعت زیاد شروع به‌توالد و تناسل کرد. به‌زودی گله‌های خرگوش سرتاسر استرالیا را فرا گرفت و چنان صدمه‌ای به‌اقتصاد کشاورزی وارد آورد که به‌یک مصیبت واقعی تبدیل شد.

برای مبارزه با این آفت اقتصاد، خرج‌های زیادی را متحمل شدند و تنها با فعالیت بی‌اندازه‌ای موفق شدند این بلیه را از سر راه خود بردارند. بعدها در کالیفرنیا، تقریباً عین این وضع در مورد خرگوش‌ها تکرار شد.

به‌عنوان نمونهٔ سوم: به‌تاریخ آموزندهٔ جزیرهٔ جامائیکا می‌پردازیم: دراین جزیره مار زهرآلود فراوان بود. برای این‌که از شر این حیوان خلاص شوند، تصمیم گرفتند که «پرندهٔ منشی» را به‌جزیره بیاورند، چون این پرنده با ولع تمام، مارهای زهری را نابود می‌کند. واقعاً هم تعداد مارها، به‌سرعت رو به‌کاهش گذاشت، ولی درعوض تعداد موش‌های صحرایی که قبلاً طعمهٔ مارها بودند، به‌طور غیرعادی رو به‌فزونی گذاشت. موش‌های صحرایی، چنان خسارتی به‌مزارع نیشکر زدند، که ناچار شدند برای نابودی آن‌ها، به‌طور جدی چاره‌ای بیندیشند. می‌دانیم که دشمن موش صحرایی، «نمس هندی» *(Mangouste)* است. تصمیم گرفتند که ۴ جفت از این جانور را به‌جزیره بیاورند و آن‌ها را در توالد و تناسل آزاد بگذارند. جانوران جدید خیلی خوب، خود را به‌وضع جدید تطبیق دادند و به‌زودی، تمام جزیره را پر کردند. به‌ده سال نکشید که آن‌ها تقریباً همهٔ موش‌ها

را از بین بردند. اما حیف که وقتی موش‌ها را از بین بردند، شروع به‌خوردن هرچیزی کردند و به‌جانورانی تبدیل شدند که برای پرکردن شکم خود، به‌هرطرفی رو می‌آوردند، به‌جان توله‌سگ‌ها، بزها، بچه‌خوک‌ها، پرندگان خانگی و تخم‌های آن‌هاافتادند. و وقتی تعداد آن‌ها باز هم زیادتر شد، دیگر به‌طرف باغ‌های میوه، مزارع گندم و غیره سرازیر شدند. به‌این ترتیب، اهالی مجبور شدند، شروع به‌از بین‌بردن دوست و متفق قبلی خود بکنند، ولی آن‌ها تا حدی موفق شدند، که ضررهای این حیوان را محدود کنند.



شکل ۸۲. «پرنده منشی» ـ نابودکنندهٔ مار

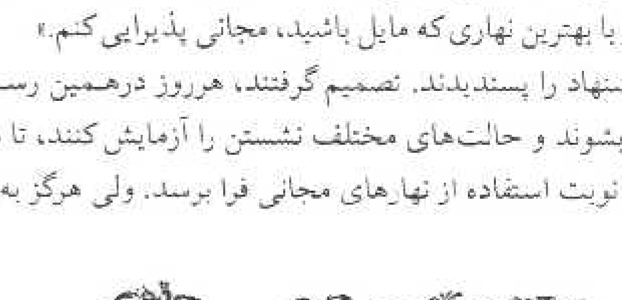
۶۵. نهار مجانی

ده نفر جوان تصمیم گرفتند، به‌مناسبت پایان دورهٔ دبیرستان مجلس جشنی، به‌صرف نهار، در رستوران تشکیل دهند. وقتی همه جمع شدند و اولین قسمت نهار داده شد،برسر جای نشستن، بین آن‌ها بحث درگرفت. یکی پیشنهاد کرد، برحسب حروف الفبا پهلوی

هم بنشینند، دیگری گفت برحسب سن، سومی معدل نمره‌ها را پیشنهاد کرد، چهارمی قد و غیره. بحث به‌طول انجامید، سوپ سرد شد، ولی هیچ‌کس پشت میز ننشست. پیش‌خدمت، آن‌ها را آشتی داد، او به‌آن‌ها چنین خطاب کرد: «دوستان جوان، از مجادله دست بردارید، همان‌طور که هستید پشت میز بنشینید و به‌من گوش کنید.»

هرکسی در جایی نشست. پیش‌خدمت ادامه داد: «خواهش می‌کنم، یکی از شماها یادداشت کنید که الان به‌چه ترتیبی نشسته‌اید. فردا دوباره برای نهارخوردن به‌این‌جا بیایید و به‌ترتیب دیگری بنشینید، پس فردا باز هم به‌ترتیب جدیدی و غیره، تا این‌که همه‌حالت‌های ممکن را امتحان کنید. من به‌شما قول می‌دهم وقتی، دوباره نوبت به‌همین ردیفی رسید که امروز نشسته‌اید، شما را برای هرروز با بهترین نهاری که مایل باشید، مجانی پذیرایی کنم.»

پیشنهاد را پسندیدند. تصمیم گرفتند، هرروز درهمین رستوران جمع بشوند و حالت‌های مختلف نشستن را آزمایش کنند، تا هرچه زودتر نوبت استفاده از نهارهای مجانی فرا برسد. ولی هرگز به‌چنین



شکل ۸۳. هرکسی همان جا که ایستاده بود، پشت میز نشست.

روزی نرسیدند، نه به‌این علت که مستخدم به‌وعدهٔ خود وفا نکرد، بلکه به‌این علت که تعداد انواع ممکن نشستن، بی‌اندازه زیاد بود. این تعداد بدون کم و زیاد برابر با ۳۶۲۸۸۰۰ بود. به‌سادگی می‌توان حساب کرد که این تعداد روز نزدیک به ۱۰۰۰۰ سال است.

شکل ۸۴. هرگز نوبت به‌نهار مجانی نرسید

شاید باور نکنید که ۱۰ نفر بتوانند این‌قدر متنوع پهلوی هم بنشینند، اکنون عدد را امتحان می‌کنیم:

قبل از همه باید روش تعیین تعداد تبدیل‌ها را یاد بگیریم. برای آسانی محاسبه، تعداد اشیاء را کم و مثلاً سه عدد می‌گیریم و آن‌ها را A و B و C می‌نامیم.

می‌خواهیم ببینیم چند جور می‌توان آن‌ها را نسبت به‌هم تغییر جا داد؟ بحث را به‌این ترتیب شروع می‌کنیم: اگر C را کنار بگذاریم، دو شیء برای ما باقی می‌ماند که آن‌ها را تنها به‌دو روش می‌توان پهلوی هم گذاشت.

شکل ۸۵. دو چیز را تنها به‌دو روش می‌توان پهلوی هم قرار داد.

حالا شیء C را در هرکدام از این دو جفت، جا می‌دهیم. برای هرکدام از این دو جفت سه وضع پیش می‌آید:

۱) C را قبل از دو شیء قرار دهیم؛

۲) C را بعد از دو شیء قرار دهیم؛

۳) C را وسط دو شیء قرار دهیم؛

روشن است، برای قراردادن C، جز همین سه حالت، حالت دیگری وجود نخواهد داشت و چون دو جفت داشتیم (AB و BA)،

شکل ۸۶. سه چیز را به ۶ روش می‌توان پهلوی هم چید.

بنابراین همهٔ حالت‌های ممکن، برای سه شیء برابر با ۶ = ۳ × ۲ خواهد شد.

حالت‌های مختلف این وضع در شکل ۸۶ نشان داده شده است.

اکنون ۴ شیء را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را A و B و C و D می‌نامیم. دوباره، یکی از آن‌ها و مثلاً D را کنار می‌گذاریم و با سه شیء دیگر، تمام تبدیل‌های ممکن را انجام می‌دهیم. می‌دانیم، دراین حالت، ۶ تبدیل خواهیم داشت. ببینیم شیء چهارم D را درهریک از این ۶ گروه سه‌تایی چند جور می‌توان قرار داد؟

روشن است که چهار جور:

۱) D را قبل از سه شیء دیگر قرار دهیم؛

۲) D را بعد از سه شیء دیگر قرار دهیم؛

۳) D را بین شیء اول و دوم قرار دهیم؛

۴) D را بین شیء دوم و سوم قرار دهیم؛

و به‌این ترتیب به‌طور کلی:

$$۶ \times ۴ = ۲۴$$

تبدیل خواهیم داشت، از آن‌جا که ۶ = ۳ × ۲ و ۲ = ۱ × ۲ می‌باشد، تعداد گروه‌های تبدیل را می‌توان به‌صورت ضرب زیر نوشت:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴$$

اگر همین استدلال را برای حالتی که ۵ شیء داریم، انجام دهیم، تعداد تبدیل‌ها خواهد شد:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$$

و برای ۶ شیء:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۷۲۰$$

و به‌همین ترتیب برای وقتی که تعداد چیزها بیشتر باشد. حالا به‌موضوع ۱۰ نفری که منتظر نهار مجانی بودند، بر می‌گردیم. اگر بخواهیم تعداد گروه‌های تبدیل را برای ۱۰ شیء پیدا کنیم، باید زحمت ضرب زیر را تحمل نماییم:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$$

و دراین صورت همان عددی را که قبلاً ذکر کردیم، به‌دست خواهیم آورد:

$$۳۶۲۸۸۰۰$$

اگر بین این ۱۰ جوان ۵ نفر دختر بودند و می‌خواستند، طوری پشت میز بنشینند که به‌تناوب، پسر و دختر پهلوی هم قرار بگیرند، محاسبه بغرنج‌تر می‌شد، تعداد تبدیل‌ها دراین حالت به‌مراتب کمتر و محاسبه آن کمی مشکل‌تر می‌شود.

فرض کنید یکی از پسران جوان به‌طور تصادفی پشت میز بنشیند. بقیهٔ ۴ نفر، درحالی که جای دخترها را بین خود خالی نگه می‌دارند، می‌توانند $۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ نوع مختلف بنشینند، و با توجه به‌این‌که تعداد صندلی‌ها ۱۰ عدد است، برای جوان اولی ۱۰ حالت مختلف وجود خواهد داشت، یعنی تعداد تبدیل‌های ممکن، برای پسران جوان $۲۴۰ = ۲۴ \times ۱۰$ می‌باشد.

حال ببینیم ۵ دختر جوان، چند جور می‌توانند روی صندلی‌های خالی بنشینند؟ واضح است که:

$۱۲۰ = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ نوع. به‌این ترتیب اگر ۲۴۰ حالت تبدیل پسران جوان را در ۱۲۰ ضرب کنیم، تعداد ممکن تبدیل‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۲۴۰ \times ۱۲۰ = ۲۸۸۰۰$$

این عدد خیلی کوچک‌تر از عدد قبلی است. دراین مورد تنها ۷۹ سال وقت لازم است. اگر مهمان‌های رستوران ۱۰۰ سال عمر کنند، می‌توانند بعد از آن یا از خود پیش خدمت و یا از بازماندگان او نهار مجانی را مطالبه نمایند.

حال که روش محاسبهٔ تعداد تبدیل‌ها را می‌دانیم، تعداد حالت‌های مختلف مهره‌های داخل جعبهٔ «بازی با ۱۵» را معین کنیم (شکل ۸۷)[1].

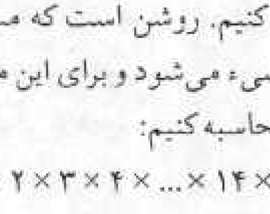
به‌زبان دیگر، می‌خواهیم تعداد مسأله‌هایی راکه می‌توان با این بازی طرح کرد، معین کنیم. روشن است که مسأله منجر به‌محاسبهٔ تعداد تبدیل‌های ۱۵ شیء می‌شود و برای این منظور می‌دانیم که باید حاصل ضرب زیر را محاسبه کنیم:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ... \times ۱۴ \times ۱۵$$

و نتیجهٔ محاسبه عدد زیر را به‌ما می‌دهد:

۱۳۰۷۶۷۴۳۶۵۰۰۰ یعنی بیش از یک تریلیون.

نیمی از این مسأله‌ها قابل حل نیستند، یعنی بیش از ۶۰۰ میلیارد مسأله غیرقابل حل دراین بازی وجود دارد. از این‌جا تا حدی می‌توان



شکل ۸۷. بازی با ۱۵

۱. برای این منظور باید همیشه خانهٔ پایین گوشهٔ راست خالی بماند.

به‌سرگرمی «بازی با ۱۵» که درآن حالت‌های غیرقابل حل تا به‌این اندازه زیاد است، پی برد.

متذکر می‌شویم، اگر برای جابه‌جا کردن هر مهره یک ثانیه وقت در نظر بگیریم و فرض کنیم که کار در تمام مدت شبانه‌روز، بدون وقفه، ادامه داشته باشد، برای این‌که تمام حالت‌های ممکن را به‌دست آوریم، بیش از ۴۰۰۰۰ سال وقت لازم است.

* * *

بحث دربارهٔ محاسبه تبدیل‌ها را با حل مسأله‌ای از زندگی تحصیلی خاتمه می‌دهیم:

در کلاسی ۲۵ شاگرد وجود دارد، به‌چند روش می‌توان این شاگردها را روی صندلی‌هایشان نشاند؟

راه‌حل این مسأله با توجه به‌آن‌چه تا این‌جا گفتیم، مشکل نیست و باید حاصل‌ضرب ۲۵ عدد زیر را به‌دست آورد:

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ... × ۲۳ × ۲۴ × ۲۵

در ریاضی برای بسیاری از محاسبه‌ها، راه‌های ساده‌ای وجود دارد، ولی برای محاسبه‌هایی از این نوع، که دراین قسمت به‌آن برخورد کرده‌ایم، هیچ‌راه ساده‌ای به‌دست نیامده است. برای محاسبهٔ دقیق این ضرب، هیچ راه درستی جز ضرب مستقیم همهٔ این عددها وجود ندارد. فقط با گروه‌بندی عددها، می‌توان تا حدی به‌کوتاه‌تر کردن محاسبه کمک کرد. نتیجهٔ ضرب، عدد بسیار بزرگی با ۲۶ رقم خواهد بود، عددی که اندازهٔ آن در قدرت تصور ما نیست. این عدد چنین است:

۱۵۵۱۱۲۱۰۰۴۳۳۳۰۹۸۵۹۸۴۰۰۰۰۰۰

این عدد، از تمام عددهای بزرگی که تاکنون داشتیم، بزرگ‌تر است و به‌راستی واژهٔ «عدد بزرگ» نمی‌تواند معرف بزرگی آن باشد. عددی که نماینده مجموع قطره‌های کوچک آب‌ها در تمام اقیانوس‌ها و دریاهای کرهٔ زمین است، در مقابل این عدد عظیم، نمی‌تواند هیچ‌گونه عرض اندامی بکند.

۶۶. جابه‌جا کردن پول‌های خُرد

به‌یاد دارم که وقتی کوچک بودم، برادر بزرگ‌ترم یک بازی با پول به‌من یاد داد: سه بشقاب پهلوی هم می‌گذاریم و در بشقاب اولی، اول یک سکهٔ بیست ریالی قرار می‌دهیم، روی آن یک سکهٔ ده ریالی، روی آن یک سکهٔ پنج ریالی، سپس یک سکهٔ دو ریالی و سرانجام روی همه یک سکهٔ یک ریالی می‌گذاریم[1]. حال می‌خواهیم این

شکل ۸۸. برادرم بازی جالبی به‌من یاد داد.

۱. به‌جای سکه‌هایی که نام بردیم، می‌توان از ۵ چیز گرد که یکی نسبت به‌دیگری کوچک‌تر باشد (و مثلاً ۵ ژتون) استفاده کرد.

سکه‌ها را با سه شرط زیر در بشقاب سوم قرار دهیم:

شرط اول: هربار بیش از یک سکه برنداریم.

شرط دوم: هرگز سکهٔ بزرگ‌تر را روی سکهٔ کوچکتر نگذاریم.

شرط سوم: به‌طور موقت، می‌توان از بشقاب وسطی هم با در نظرگرفتن دو شرط اول و دوم استفاده کرد، ولی در پایان کار باید همهٔ سکه‌ها در بشقاب سوم و به‌همان ردیفی که اول بوده‌اند قرار بگیرند.

همان‌طور که می‌بینید شرط‌ها بغرنج نیست، حالا شروع کنید: من شروع به‌انتقال سکه‌ها کردم. یک ریالی را در بشقاب سوم و دو ریالی را در بشقاب وسط گذاشتم و دیگر ماندم، پنج ریالی را کجا بگذاریم؟ هم از یک ریالی و هم از دو ریالی بزرگ‌تر است. برادرم به‌داد من رسید؛ گفت: «یک ریالی را بردار و در بشقاب وسط روی دو ریالی بگذار، تا بشقاب سوم خالی شود و بتوانی پنج ریالی را درآن بگذاری.»

من هم همین کار را کردم، ولی بعد چه! دوباره به‌اشکال برخوردم. ده‌ریالی را کجا بگذارم؟ ولی توانستم معما را فوراً حل کنم: ابتدا یک ریالی را به‌بشقاب اول منتقل کردم، بعد دو ریالی را روی پنج ریالی بشقاب سوم گذاشتم و دوباره یک ریالی را از بشقاب اول برداشتم و روی دو ریالی بشقاب سوم قرار دادم. به‌این ترتیب بشقاب وسط خالی شد و توانستم ده ریالی را به‌آن جا منتقل کنم. بعد، پس از یک رشته جابه‌جا کردن سکه‌ها، موفق شدم سکه بیست ریالی را از بشقاب اول بردارم و سرانجام همهٔ آن‌ها را به‌همان ترتیب شرط اولیه در بشقاب سوم قرار دادم.

برادرم که راه حل را پسندیده بود، پرسید: «در تمام بازی چندبار

سکه‌ها را جابه‌جا کردی؟»

«حساب نکردم».

«حالا حساب می‌کنیم. این مطلب هم جالب است که ببینیم، حداقل با چند حرکت می‌توان به‌هدف رسید. اگر به‌جای ۵ سکه، تنها دو سکه یک ریالی و دو ریالی داشتیم، چند حرکت لازم داشت؟»

«سه حرکت: اول یک ریالی را در بشقاب وسط می‌گذاریم، بعد دو ریالی را در بشقاب سوم و با حرکت آخر یک ریالی را به‌بشقاب سوم منتقل می‌کنیم.»

«کاملاً درست است. حالا سکهٔ پنج ریالی را هم به‌آن‌ها اضافه کنیم و ببینیم چند حرکت برای انتقال این سکه‌ها لازم است. به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا دو سکه کوچک‌تر را به‌بشقاب وسط منتقل می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم برای این عمل ۳ حرکت لازم است. سپس سکهٔ پنج ریالی را در بشقاب خالی سوم می‌گذاریم (یک حرکت) و دوباره سکه‌های کوچک‌تر را به‌بشقاب سوم می‌بریم (سه حرکت) و درنتیجه مجموع حرکت‌ها ۷ = ۳ + ۱ + ۳ می‌شود. حالا اجازه بدهید تعداد حرکت‌ها را برای ۴ سکهٔ خودم حساب کنم. ابتدا ۳ سکهٔ قبلی را در بشقاب وسط می‌گذاریم: ۷ حرکت؛ سپس سکهٔ ده ریالی را در بشقاب سوم: یک حرکت؛ و سرانجام دوباره ۳ سکهٔ کوچک‌تر را به‌بشقاب سوم منتقل می‌کنیم: ۷ حرکت و درنتیجه ۱۵ = ۷ + ۱ + ۷ حرکت خواهیم داشت.»

«بسیار خوب و حالا برای ۵ سکه؟»

من بلافاصله حساب کردم و گفتم: «۳۱ = ۱۵ + ۱ + ۱۵». به‌این ترتیب تو روش محاسبه را هم، به‌دست آوردی. ولی من راهی نشان

می‌دهم که بتوانی این روش محاسبه را باز هم ساده‌تر کنی. می‌بینیم که عددهای ۳، ۷، ۱۵، ۳۱ همه یک واحد کوچک‌تر از حاصل‌ضرب‌های متوالی عدد ۲ در خودش می‌باشند. به‌این جدول نگاه کن:

۳ = ۲ × ۲ ـ ۱

۷ = ۲ × ۲ × ۲ ـ ۱

۱۵ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲ ـ ۱

۳۱ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ ـ ۱

«حالا فهمیدم. به‌تعداد سکه‌هایی که باید جابه‌جا شود، عدد ۲ را درخودش ضرب می‌کنیم و سپس از حاصل‌ضرب، یک واحد کم می‌کنیم. حالا من می‌توانم تعداد حرکت‌ها را برای هرتعداد دل‌خواه سکه محاسبه کنم، مثلاً برای ۷ سکه خواهیم داشت:

۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ ـ ۱ = ۱۲۸ ـ ۱ = ۱۲۷

«حالا تو این بازی قدیمی را یادگرفتی. فقط باید به‌یک مطلب هم در عمل توجه کنی: وقتی که تعداد سکه‌ها زوج باشد، باید اولین سکه (کوچک‌ترین سکه) را در بشقاب وسط قرار داد و وقتی که تعداد سکه‌ها فرد باشد، باید اولین سکه را در بشقاب سوم قرار داد، تا در پایان عمل، همهٔ سکه‌ها در بشقاب سوم جمع شده باشند.»

«تو صحبت از یک بازی قدیمی کردی، مگر این بازی از فکر خودت نبود؟»

«نه! من فقط آن را به‌صورت بازی با چند سکه درآوردم. وگرنه این بازی ریشهٔ خیلی قدیمی دارد و ظاهراً در هندوستان به‌وجود آمده است. افسانهٔ بسیار جالبی دربارهٔ این بازی باقی مانده است. در شهر

بنارس، معبدی بود که خدای هندی، سه میلهٔ الماس درآن قرار داده بود، و روی یکی از این میله‌ها ۶۴ ژتون طلایی، طوری که بزرگ‌ترین ژتون زیر همه قرار داشت و ژتون‌های دیگر به‌ترتیب کوچک‌تر روی بزرگ‌تر قرار گرفته بود. برهمن‌های این معبد، بدون خستگی، روز و شب به‌همان ترتیب و با همان شرط‌هایی که در اول بازی با سکه‌ها داشتیم، ژتون‌ها را جا به‌جا می‌کردند: هربار تنها یک ژتون بر می‌داشتند و هرگز ژتون بزرگ‌تر را روی ژتون کوچک‌تر قرار نمی‌دادند. طبق روایت افسانه، وقتی که همهٔ ۶۴ ژتون به‌میلهٔ سوم منتقل می‌شود، پایان جهان خواهد بود.»

«پس اگر این افسانه به‌حقیقت می‌پیوست، حالا دیگر مدت‌ها از نابودی جهان گذشته بود!»

«شاید این‌طور فکر می‌کنی که جابه‌جا کردن ۶۴ ژتون نباید وقت خیلی زیادی بگیرد؟»

«البته، اگر برای هر حرکت یک ثانیه در نظر بگیریم، درهر ساعت می‌توان ۳۶۰۰ انتقال انجام داد.»

«خوب بعد چه؟»

«دریک شبانه‌روز، قریب به‌صدهزار و در ۱۰ روز نزدیک به‌یک میلیون حرکت انجام می‌شود. و من مطمئنم که یک میلیون حرکت برای جابه‌جا کردن هزار ژتون هم کافی باشد.»

«اشتباه می‌کنی! برای این که بتوان تمام ۶۴ ژتون را جابه‌جا کرد، با حساب کامل پانصد میلیارد سال وقت لازم است.»

«برای چه؟ مگر تعداد حرکت‌ها یک واحد کم‌تر از حاصل‌ضرب ۶۴ مرتبه ۲ نیست؟ ... اگر اجازه بدهی من هم الان ضرب می‌کنم.»

شکل ۸۹. برهمن‌ها بدون خستگی ژتون‌ها را جابه‌جا می‌کردند.

«بسیار خوب. من حاضرم به تو فرصت بدهم که این ضرب را انجام بدهی.»

برادرم رفت و من غرق در محاسبه شدم. ابتدا عدد ۲ را ۱۶ مرتبه در خودش ضرب کردم و سپس نتیجه را (۶۵۵۳۶) در خودش ضرب کردم و حاصل را دوباره درخودش ضرب کردم، سپس یک واحد آن را بیرون رفتم و به عدد زیر رسیدم:

۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵[1]

حق با برادرم بود.

بی‌تردید برای شما جالب است که سن واقعی جهان را بدانید. طبق محاسبه دانشمندان، البته به‌تقریب، عددهای زیر به‌دست آمده است:

---

۱. خواننده با این عدد آشناست. در افسانهٔ مربوط به بازی شطرنج هم همین عدد را به‌دست آورده بودیم.

از به‌وجود آمدن خورشید ۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ سال می‌گذرد.
از به‌وجود آمدن کرهٔ زمین ۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰ سال می‌گذرد.
از به‌وجود آمدن زندگی روی زمین ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ سال می‌گذرد.
از به‌وجود آمدن انسان ۵۰۰۰۰۰ سال می‌گذرد.

۶۷. شرط‌بندی

موقع نهار، در سالن نهارخوری خانهٔ استراحت، این مبحث پیش آمد که **احتمال** حوادث را **چگونه حساب می‌کنند**. ریاضی‌دان جوانی که بین حاضرین بود، یک سکهٔ پنج ریالی از جیبش بیرون آورد و گفت: «من بدون این‌که به‌این سکه نگاه کنم، آن را روی میز می‌اندازم احتمال این‌که علامت شیر بالا باشد چه‌قدر است؟»

یکی از میان حاضرین صدایش را بلند کرد: «اول معنی «احتمال» را بگویید، معنی آن کاملاً روشن نیست.»

«خیلی ساده است! سکه دو جور ممکن است روی میز بیفتد، ممکن است علامت شیر رو باشد و ممکن است در زیر قرار گیرد.

تمام حالتهای ممکن در این دو حالت است.

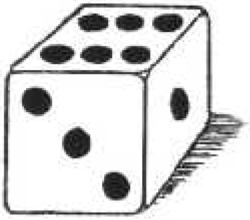
از این دو مورد، تنها یک حالت مورد نظر ما می‌تواند باشد، حالا نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مورد نظر ما}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}} = \frac{1}{2}$$

«کسر $\frac{1}{2}$ «احتمال» بالا قرارگرفتن شیر را پس از انداختن سکه برای ما بیان می‌کند.»

یکی از آن میان گفت: «با سکه آسان است، مثلاً حالت‌های ممکن را در مورد طاس‌بازی نشان دهید.»

ریاضی‌دان جوان گفت: «بسیار خوب، دربارهٔ طاس مطالعه می‌کنیم؛ طاس به‌شکل مکعب است و در هرطرف آن عددی نشان داده شده است (شکل ۹۰). ببینیم وقتی که طاس را می‌اندازیم، مثلاً چقدر احتمال دارد که عدد ۶ بالا قرار گیرد؟ تمام حالت‌های ممکن دراین مورد چه‌قدر است؟ مکعب می‌تواند روی هریک از سطح‌های جانبی خودش قرار گیرد و بنابراین ۶ حالت ممکن وجود دارد و وقتی که ما می‌خواهیم که ۶ در بالا قرار گیرد، تنها یکی از حالت‌ها را مورد نظر داریم. بنابراین «احتمال» از تقسیم ۱ بر ۶ به‌دست می‌آید و به‌طور خلاصه احتمال آوردن ۶ برابر با کسر $\frac{۱}{۶}$ است.»



شکل ۹۰. طاس‌بازی

یکی ازکسانی که در جمع بود پرسید: «آیا واقعاً می‌توان احتمال را درهمهٔ موردها حساب کرد؟ مثلاً من حدس می‌زنم اولین کسی که از جلو پنجره اتاق عبور خواهد کرد، مرد است. چه قدر احتمال دارد که من درست حدس زده باشم؟»

«واضح است که این احتمال برابر با $\frac{۱}{۲}$ است، فقط به‌شرطی که بچهٔ ۱ ساله را هم مرد به‌حساب آوریم. تعداد مردها در دنیا با تعداد زن‌ها برابر است.»

یکی دیگر پرسید: «چقدر احتمال دارد که دو نفری که قبل از همه از جلو پنجره عبور می‌کنند مرد باشند؟»

«این محاسبه کمی بغرنج‌تر است. باید ببینیم چند حالت ممکن است به‌طور کلی وجود داشته باشد:

۱) ممکن است دو نفر اول مرد باشند.

۲) ممکن است نفر اول مرد و نفر دوم زن باشد.

۳) برعکس آن یعنی نفر اول زن و نفر دوم مرد باشد.

۴) و بالاخره ممکن است هردو نفر زن باشند.

به‌این ترتیب تعداد تمام حالت‌های ممکن برابر با ۴ می‌شود و شما از میان تمام این حالت‌های ممکن به‌یکی نظر دارید: به‌حالت اول، و بنابراین برای احتمال وقوع آن، کسر $\frac{۱}{۴}$ را به‌دست خواهیم آورد. به‌این ترتیب مسأله شما حل شد.»

«فهمیدم. اکنون ممکن است خواهش کنم که آن را برای سه نفر هم حل کنید، یعنی چه‌قدر احتمال دارد که سه نفر اولی که از جلو پنجره عبور می‌کنند مرد باشند؟»

«البته. این حالت را هم حساب می‌کنیم. دوباره باید تمام حالت‌های ممکن را به‌دست آوریم. دیدیم برای ۲ نفری که قبل از همه عبور می‌کنند، ۴ حالت وجود دارد. وقتی که بخواهیم برای ۳ نفر حساب کنیم، تعداد حالت‌های ممکن دو برابر می‌شود، زیرا به‌دنبال دونفری که درهریک از ۴ حالت قبل بود، ممکن است یک مرد و یا یک زن عبور کند، به‌این ترتیب تمام حالت‌های ممکن برابر با ۸=۴×۲ می‌شود، و درنتیجه احتمال این که هرسه نفر مرد باشند، برابر با $\frac{۱}{۸}$ می‌شود (زیرا از میان این ۸ حالت ما، تنها وقوع یک حالت را

انتظار می‌کشیم). از این‌جا می‌توانیم به‌سادگی قانونی برای محاسبه به‌دست بیاوریم: درحالتی که فقط به‌دو عابر توجه داشته باشیم احتمال $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ و درحالت سه نفر $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ و در حالت چهار نفر حاصل ضرب ۴ مرتبه $\frac{1}{2}$ و غیره. همان‌طور که دیده می‌شود، احتمال وقوع حادثه مرتباً کوچک‌تر می‌شود.»

«مثلاً این احتمال برای ۱۰ نفر چه‌قدر است؟»

«یعنی احتمال این‌که ۱۰ نفر اولی که پشت‌سرهم از جلو پنجره عبور می‌کنند، مرد باشند، چه‌قدر است؟ باید $\frac{1}{2}$ را ۱۰ مرتبه در خودش ضرب کنیم، عدد $\frac{1}{1024}$ به‌دست می‌آید، یعنی کم‌تر از یک‌هزارم. به‌این ترتیب اگر شما برای وقوع این حادثه روی یک ریال شرط‌بندی کنید، من حاضرم روی ۱۰۰۰ ریال شرط ببندم که این واقعه اتفاق نمی‌افتد.»

صدایی درآمد که: «عجب معاملهٔ پرسودی! من هم می‌خواهم یک ریال بدهم تا امکان برد هزار ریال داشته باشم.»

«ولی این را هم بدانید که هزارشانس علیه شما وجود دارد.»

«هیچ مانعی ندارد. من حتی حاضرم برای عبور ۱۰۰ مرد هم، یک ریال در مقابل هزار ریال، شرط ببندم.»

ریاضی‌دان پرسید: «آیا هیچ تصور کرده‌اید که احتمال وقوع این حادثه چه‌قدر کم است؟»

«یک میلیونیم، و یا چیزی از این قبیل.»

«خیلی خیلی کم‌تر! کسر یک میلیونیم تنها برای ۲۰ عابر به‌دست می‌آید. برای ۱۰۰ عابر ... اجازه بدهید روی کاغذ حساب کنم. میلیون ... تریلیون ... کاتریلیون ... عجب! عدد یک که جلو آن سی

صفر گذاشته باشیم!»

«همین؟»

«برای شما ۳۰ صفر کم است؟ تعداد قطره‌های آبی که در تمام اقیانوس‌ها وجود دارد، به‌اندازهٔ یک هزارم این عدد هم نیست.»

«با همهٔ عظمتی که برای این عدد نشان دادید، در مقابل یک ریال من، چه‌قدر حاضرید شرط ببندید؟»

«... تمام دارایی خودم را.»

«همه دارایی؟ نه این خیلی زیاد است. من فقط دوچرخهٔ شما را قبول دارم، حاضرید؟»

«چرا حاضر نباشم؟ بفرمایید، روی دوچرخه در مقابل یک ریال شرط می‌بندم و مطمئنم که هیچ‌گونه ریسکی نکرده‌ام.»

«منهم ریسک نکرده‌ام. یک ریال چیز زیادی نیست. اگر من ببرم، یک دوچرخه برده‌ام، ولی اگر شما ببرید چیزی نبرده‌اید.»

«بسیار خوب، ولی به‌هرحال شما مسلماً خواهید باخت! دوچرخه را هرگز نخواهید برد، درحالی که باید گفت، یک ریال شما دیگر در جیب من است.»

یکی از دوستان ریاضی‌دان جوان، رو به‌او کرد و گفت: «می‌خواهی چه کار کنی؟ برای یک ریال دوچرخه‌ات را به‌وسط می‌گذاری؟ این دیوانگی است!»

ولی ریاضی‌دان جواب داد: «برعکس. دیوانگی آن است که آدم یک ریال خود را در مقابل چنین شرطی، به‌خطر بیندازد. زیرا بدون هیچ تردیدی خواهد باخت. درست مثل این‌که پول خود را دور انداخته باشد.»

«ولی بالاخره یک شانس برای من وجود دارد.»

«یک قطره در تمام اقیانوس‌ها، در ده‌ها اقیانوس! این شانس شما است. ولی برای من ده‌ها اقیانوس در مقابل یک قطره و بنابراین برد من به‌همان اندازه مسلم است که دو دو تا چهار تا است.»

صدای پیرمردی که در تمام مدت ساکت بود، بلند شد: «فریب خوردی مرد جوان، فریب خوردی!»

«چه‌طور؟ شما هم، پروفسور، دراین مورد شک دارید؟»

«آیا هیچ دراین‌باره فکر کرده‌اید که همهٔ حادثه‌ها دراین‌جا، یکنواخت نیست؟ حساب احتمالات در مورد چگونه حادثه‌هایی صحیح است؟ برای حادثه‌های یکنواخت، مگر این‌طور نیست؟ ولی دربارهٔ نمونه‌ای که مورد بحث ما است، وضع برعکس است. گوش کنید، خود حقیقت، اشتباه شما را روشن می‌کند. صدای موزیک نظامی را می‌شنوید؟»

از بیرون صدای موزیک نظامی نزدیک می‌شد. ریاضی‌دان جوان آشفته شد و با افسردگی گفت: «بله این درست است، من باختم، دوچرخه از دستم رفت ...»

بعد از چند دقیقه همه‌چیز روشن شد. یک هنگ سرباز از جلو پنجره عبور کرد.

۶۸. عددهای بزرگ در اطراف ما و در درون ما

برای این‌که با عددهای بزرگ سروکار پیدا کنیم، لازم نیست دنبال حالت‌های استثنایی برویم. عددهای بزرگ، همه‌جا در اطراف ما و حتا در درون ما وجود دارد و تنها باید چشم باز کرد و آن‌ها را دید.

آسمانی که در بالای سر ما است، زمینی که زیر پای ما قرار گرفته، هوایی که در اطراف ما وجود دارد. خونی که در بدن ما حرکت می‌کند ... همه پر از غول‌های عظیمی از جهان عددها هستند.

عظمت عددی که در فضای بی‌پایان وجود دارد، بر بسیاری از مردم پوشیده نیست. به‌خوبی روشن است که، اگر صحبت از تعداد ستارگان عالم، فاصله‌های آن‌ها از ما و از یک‌دیگر و اندازه‌های آن‌ها (وزن و بزرگی) باشد، همه‌جا به‌عددهایی برخورد می‌کنیم که اکثر بیش از حد تصور ما بزرگ هستند. بی‌جهت نیست که واژهٔ «عدد نجومی» تا به‌این اندازه عمومی و همه‌گیر شده است. ولی شاید خیلی‌ها از این مطلب اطلاع نداشته باشند که همین جسم‌های سماوی، که اخترشناسان آن‌ها را خیلی کوچک می‌نامند، در مقایسه با اندازه‌های معمولی و زمینی بسیار بزرگ هستند. در منظومهٔ شمسی ما، سیاره‌هایی وجود دارد، که به‌علت اندازه‌های ناچیزی که دارند، نزد اخترشناسان نام «خُرد» به‌خود گرفته‌اند. بین آن‌ها سیاره‌هایی است که قطر آن‌ها برابر چند کیلومتر می باشد. از نظر اخترشناسان، که عادت به‌اندازه‌های خیلی بزرگ دارند، این سیاره‌ها، به‌قدری کوچک‌اند که از آن‌ها به‌عنوان «ذرات بسیار کوچک» نام می‌برند. ولی این اجسامی که در مقابل سایر ستارگان آسمان «بسیار کوچک» هستند، در مقابل اندازه‌های معمولی که ما با آن‌ها سرو کار داریم، خیلی بزرگ‌اند. سیاره «بسیار کوچکی» را در نظر بگیرید که قطر آن فقط ۳ کیلومتر باشد: چنین سیاره‌ای به‌تازگی کشف شده است. با کمک قواعد هندسی، به‌سادگی می‌توان حساب کرد که سطح این جسم، ۲۸ کیلومتر مربع و یا ۲۸۰۰۰۰۰۰ متر مربع است، در هر متر

مربع، ۷ نفر را می‌توان جا داد و بنابراین می‌بینید که در ۲۸ ملیون متر مربع برای ۱۹۶ ملیون نفر جا وجود دارد.

همین شن‌هایی که زیر پای ما لگدکوب می‌شود، ما را به‌سمت عددهای فوق‌العاده بزرگی می‌کشاند. بی‌جهت نیست که می‌گویند «بی‌پایان، مثل شن‌های ساحل دریا». از قدیم، عظمت تعداد شن‌ها را به‌عظمت تعداد ستارگان می‌دانسته‌اند. درقدیم تلسکوپ نبود، ولی با چشم بدون سلاح، نزدیک به ۳۵۰۰ ستاره، در آسمان دیده می‌شود (دریک نیم کره) و تعداد شن‌های کنار دریا، میلیون‌ها مرتبه بیشتر از ستارگانی است، که ما به‌طور ساده و با چشم بدون سلاح می‌بینیم. درهمین هوایی که استنشاق می‌کنیم، عدد غول‌پیکر و عظیم‌الجثه‌ای خوابیده است. هر سانتی‌متر مکعب هوا، هر انگشتانهٔ آن، شامل ۲۷ کوینتیلیون (یعنی عدد ۲۷ که جلو آن ۱۸ صفر گذاشته باشیم) ذره کوچک است که آن‌ها را «ملکول» می‌نامند.

به‌سختی می‌توان عظمت این عدد را درک کرد. اگر به‌این اندازه انسان وجود داشت، سیارهٔ ما نمی‌توانست آن‌ها را در روی خود جا دهد. درحقیقت سطح کل کرهٔ زمین، اعم از خشکی‌ها و اقیانوس‌ها، برابر با ۵۰۰ ملیون کیلومتر مربع است و اگر آن را به‌متر مربع تبدیل کنیم می‌شود: ۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ متر مربع.

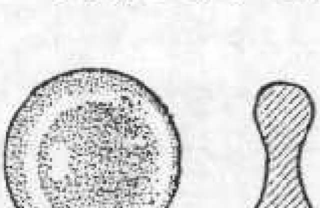
اگر ۲۷ کوینتیلیون را به‌این عدد تقسیم کنیم، عدد ۵۴۰۰۰ را به‌دست می‌آوریم. یعنی باید در هرمتر مربع سطح زمین، بیش از ۵۰ هزار نفر زندگی کنند!

قبلاً یادآور شدیم که عددهای بزرگ در درون بدن آدمی هم مخفی شده‌اند. ما این مطلب را می‌توانیم مثلاً در مورد خونی که در بدنمان

جریان دارد، روشن کنیم. اگر یک قطرهٔ خون را زیر میکروسکوپ نگاه کنیم، می‌بینیم که تعداد فوق‌العاده زیادی موجودات بسیار ریز، در آن شناورند که آن‌ها را گلبول‌های قرمز خون می‌گویند و رنگ قرمز خون هم به‌خاطر وجود همین گلبول‌ها است. هریک از این گلبول‌های قرمز خون به‌شکل بالش بسیار کوچک گردی هستند که از وسط، فرورفتگی داشته باشد (شکل ۹۱). همهٔ آن‌ها تقریباً به‌یک اندازه‌اند و قطری درحدود ۰/۰۰۷ میلی‌متر و ضخامتی مساوی ۰/۰۰۲ میلی‌متر دارند. در عوض تعداد آن‌ها فوق‌العاده زیاد است و در یک قطرهٔ کوچک خون به‌حجم یک میلی‌مترمکعب، ۵میلیون از آن‌ها وجود دارد، بنابراین ببینید در تمام بدن ما چند گلبول قرمز وجود دارد؟ اگر وزن آدم را به‌کیلوگرم حساب کنیم، نزدیک به $\frac{۱}{۱۴}$ آن خون برحسب لیتر وجود دارد. اگر شما ۴۰ کیلوگرم وزن داشته باشید، نزدیک به ۳ لیتر یا ۳،۰۰۰،۰۰۰ میلی‌مترمکعب خون خواهید داشت. و چون درهر میلی‌مترمکعب‌خون، ۵ملیون گلبول قرمز وجود دارد، بنابراین تعداد تمام گلبول‌های قرمز خون شما چنین می‌شود:

$$۵،۰۰۰،۰۰۰ \times ۳۰۰۰،۰۰۰ = ۱۵،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰$$

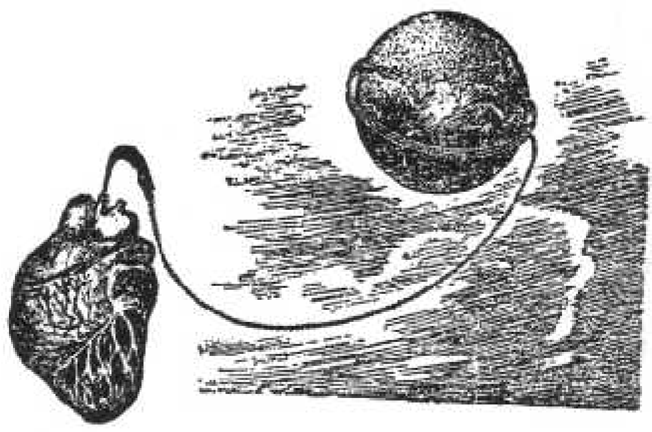
۱۵ تریلیون گلبول قرمز! اگر افراد این ارتش عظیم را یکی پس از



شکل ۹۱. گلبول قرمز خون

دیگری پشت سرهم قرار دهیم، چه طولی به‌وجود خواهد آمد؟ به‌سادگی می‌توان حساب کرد که چنین طولی مساوی ۱۰۵۰۰۰ کیلومتر خواهد شد. یعنی رشته‌ای به‌طول بیش از صدهزار کیلومتر از گلبول‌های قرمز خون شما به‌دست می‌آید. چنین رشته‌ای، می‌تواند دور استوای زمین به‌اندازهٔ:

$$۱۰۰,۰۰۰ : ۴۰,۰۰۰ = ۲/۵$$

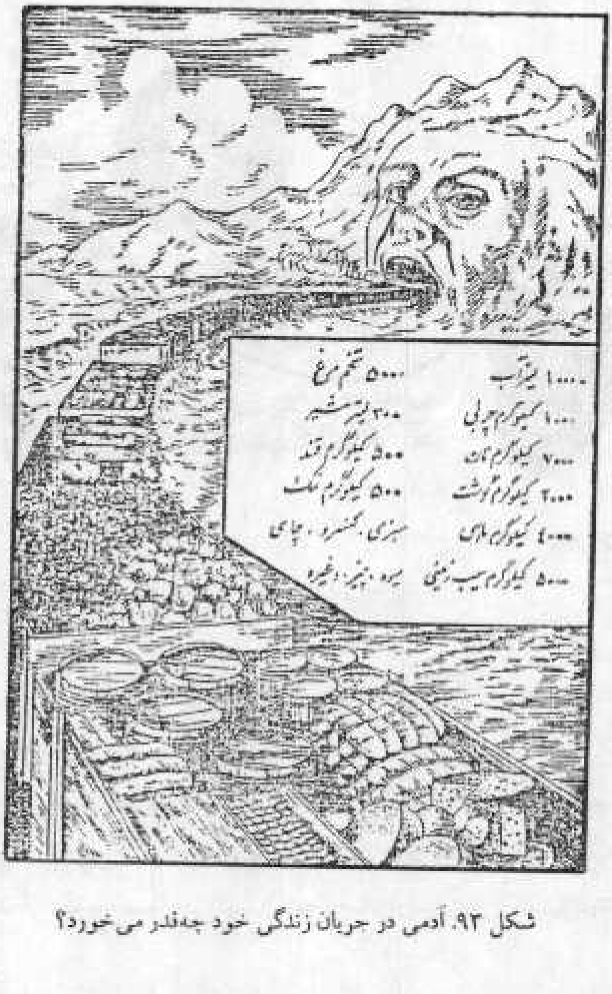


شکل ۹۲. رشته‌ای که از گلبول‌های قرمز خون یک آدم بالغ درست شود، می‌تواند سه‌مرتبه دور کرهٔ زمین بپیچد.

دو دور و نیم بپیچد، و اگر گلبول‌های قرمز خون یک آدم بالغ را در نظر بگیریم، به‌سه دور هم خواهد رسید.

ببینیم این ذرات کوچک خون برای ارگانیزم بدن ما چه اهمیتی دارند؟ وظیفهٔ این گلبول‌ها، رساندن اکسیژن به‌تمام بدن است، وقتی که خون از ریه‌ها عبور می‌کند، گلبول‌های قرمز از اکسیژن اشباع

می‌شوند و سپس وقتی که جریان خون، آن‌ها را به‌نسج‌های بدن، تا دورترین نقطه‌ها نسبت به‌ریه‌ها، می‌رساند، دوباره اکسیژن را پس می‌دهند. کوچکی فوق‌العادهٔ گلبول‌ها است که آن‌ها را قادر به‌انجام این وظیفه کرده است، و درنتیجه سطح آن‌ها هم زیاد می‌شود و همین سطح گلبول‌ها است که می‌تواند اکسیژن ریه‌ها را جذب و دفع کند.



شکل ۹۳. آدمی در جریان زندگی خود چه‌قدر می‌خورد؟

محاسبه نشان می‌دهد که سطح کل گلبول‌ها چندین‌بار بیشتر از سطح بدن آدمی است، زیرا برابر با ۱۲۰۰ متر مربع می‌باشد و این سطح برابر با سطح بستان بزرگی به‌طول ۴۰ متر و عرض ۳۰ متر است. حالا می‌فهمیم، کوچکی گلبول‌ها و تعداد زیاد آن‌ها تا چه‌اندازه برای زندگی ارگانیزم بدن انسان لازم است: آن‌ها می‌توانند اکسیژن را در سطح بدن خود جذب و دفع کنند، سطحی که دو هزارمرتبه، از سطح بدن ما بزرگ‌تر است.

هم‌چنین اگر به‌جمع کل انواع غذاهایی که انسان در ۷۰ سال زندگی متوسط خود می‌خورد بپردازیم، باز هم عددهای بزرگی به‌دست می‌آوریم. برای حمل این خوراک‌ها: چندین تن آب، نان، گوشت، پرنده، ماهی، سیب‌زمینی و سایر سبزی‌ها، هزاران تخم‌مرغ، هزاران لیتر شیر و غیره، که انسان در جریان زندگی خود مصرف می‌کند، یک قطار کامل راه‌آهن لازم است. در شکل ۹۳، مقدار مصرفی بعضی از خوراک‌ها، داده شده است.

می‌بینیم که وزن آن‌ها هزاران بار بیشتر از وزن بدن آدمی است. و واقعاً عجیب است که یک نفر می‌تواند درجریان زندگی خود، چنین قطار بزرگی پراز کالاهای مختلف را مصرف کند!

□

درشمارهٔ ۶۵، زیرعنوان «نهار مجانی» راه محاسبه تبدیل‌های مختلف چندچیز را یاد گرفتیم. در همان‌جا یادآور شدیم که، برای محاسبهٔ حاصل‌ضربی مثل

$$1\times2\times3\times4\times\ldots\times23\times24\times25$$

هیچ راه ساده‌ای، جز ضرب مستقیم وجود ندارد. تنها می‌توان با

گروه‌بندی عددها، تاحدی، عمل‌ها را تندتر انجام داد.

باوجوداین، برای چنین محاسبه‌هایی، اگر نیازی به‌محاسبه مقدار دقیق آن نباشد و مقدار تقریبی آن برای ما کافی باشد، می‌توان نتیجهٔ محاسبه را، تا حدی ساده بدست آورد. در ریاضیات، اغلب با این وضع روبه‌رو می‌شویم که، به‌حاصل‌ضرب عددهای درست از ۱ تا n نیاز داریم. این حاصل‌ضرب را با نماد $n!$ نشان می‌دهند:

$$1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n=n!$$

و آن را «فاکتوریل n» یا «n فاکتوریل» می‌خوانند. مثلاً:

$$5!=1\times2\times3\times4\times5=120;$$

$$10!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=3628800$$

در سدهٔ هجدهم میلادی، یک ریاضی‌دان انگلیسی به‌نام ستیرلینگ، دستوری را پیدا کرد که، به‌یاری آن، می‌توان، مقدار تقریبی فاکتوریل‌ها را به‌دست آورد. این دستور، چنین است:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

که در آن

$$\pi=3{,}14\ldots;\quad e=2{,}718\ldots$$

عددهای گنگی هستند که در بخش‌های مختلف ریاضیات کاربرد دارند.

اگر باتوجه به‌دستور ستیرلینگ و استفاده از جدوهای لگاریتم، محاسبه را انجام دهیم، مثلاً به‌دست می‌آید.

$$25!\approx1{,}55\times10^{25}$$

۸

بدون وسیلهٔ اندازه‌گیری

۶۹. اندازه‌گیری فاصله با قدم‌ها

خط‌کش مدرج و یا نوار متر، همیشه در دسترس نیست، و لازم است راه‌هایی برای اندازه‌گیری فاصله‌ها، لااقل به‌تقریب، بدون در دست داشتن این وسیله‌ها پیدا کنیم.

بهترین راه برای اندازه‌گیری مسافت‌های کم و بیش طولانی (مثلاً موقعی که به‌گردش رفته‌اید)، استفاده از قدم است. برای این منظور، کافی است طول قدم خود را بدانید و، در ضمن، بتوانید قدم‌های خودتان را بشمارید. البته قدم‌های یک نفر یکنواخت نیست: می‌توان قدم‌های کوتاه یا قدم‌های بلند برداشت، ولی در حرکت عادی، طول قدم‌ها کم و بیش یکنواخت است و اگر طول متوسط آن را بدانیم، می‌توانیم، بدون این که اشتباه زیادی پیش آید، فاصلهٔ مورد نظر را با قدم‌هایمان اندازه بگیریم. برای این کار، طول تعداد زیادتری از قدم‌های خود را اندازه بگیرید و از آن‌جا، طول یک قدم را محاسبه کنید، و البته این اندازه‌گیری را نمی‌شود بدون وسیله انجام داد.

نوار یا طنابی انتخاب و ۲۰ متر آن را جدا کنید. این نوار را روی زمین همواری به‌خط مستقیم قرار دهید و دو سر آن را روی زمین علامت بگذارید. حالا در طول این ۲۰ متر با قدم‌های معمولی حرکت

کنید و آن‌ها را بشمارید. ممکن است تعداد قدم‌های شما دراین فاصله، عدد درستی نباشد. دراین‌صورت، اگر باقی‌ماندهٔ مسافت از نیم قدم کم‌تر است، از آن صرف نظر کنید و اگر در حدود نیم قدم یا بیشتر از آن است، آن را یک قدم کامل به‌حساب آورید. طول ۲۰ متر را برتعداد قدم‌ها تقسیم کنید، طول متوسط یک قدم شما به‌دست می‌آید. این عدد را به‌خاطر بسپارید تا در اندازه‌گیری‌های لازم، از آن استفاده کنید.

برای این‌که، ضمن شمردن قدم‌ها، حواس شما پرت نشود (بخصوص وقتی که فاصله طولانی است)، می‌توانید از روش زیر استفاده کنید: قدم‌هایتان را تا ۱۰ بشمارید، وقتی که به ۱۰ قدم رسیدید، یکی از انگشت‌های دست چپ خود را خم کنید. وقتی هر پنج انگشت دست چپ خم شد، برای هر ۵۰ قدم، یکی از انگشت‌های دست راست خود را خم کنید. به‌این ترتیب می‌توانید تا ۲۵۰ قدم را بشمارید. از آن به‌بعد، باید به‌خاطر بسپارید که چندبار همهٔ انگشت‌های دست راست خود را بسته‌اید. اگر مثلاً برای فاصله‌ای، ۲ بار همهٔ انگشت‌های دست راست خود را بسته باشید، علاوه برآن در انتهای فاصله ۳ انگشت دست راست و ۴ انگشت دست چپ، بسته باشد، تعداد قدم‌ها چنین می‌شود:

$$۲ \times ۲۵۰ + ۳ \times ۵۰ + ۴ \times ۱۰ = ۶۹۰$$

البته باید به‌این عدد، تعداد احتمالی قدم‌هایی که بعد از بستن آخرین انگشت دست چپ، شمرده‌اید، اضافه شود.

قاعده‌ای از قدیم وجود دارد که برطبق آن: طول متوسط قدم هرفرد بالغ برابر است با نصف فاصلهٔ از چشم تا کف پای او.

قاعدهٔ قدیمی دیگری، سرعت حرکت را معین می‌کند: هرکس دریک ساعت آن‌قدر کیلومتر راه می‌رود، که در سه ثانیه می‌تواند قدم بردارد. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که این قاعده زمانی درست است که طول هرقدم، مقدار مشخصی باشد و همان‌طور که هم‌اکنون خواهیم دید، این طول قدم به‌اندازهٔ کافی بزرگ است.

فرض کنید طول هرقدم x متر و تعداد قدم‌هایی که در سه ثانیه برداشته می‌شود، برابر با n باشد. دراین صورت می‌توان در ۳ ثانیه nx متر و دریک ساعت (یعنی ۳۶۰۰ ثانیه) به‌اندازه ۱۲۰۰ nx متر یا $۱/۲nx$ کیلومتر جلو رفت. اگر این مقدار برابر با تعداد قدم‌ها در ۳ ثانیه باشد، باید داشته باشیم:

$$۱/۲nx = n \Rightarrow ۱/۲x = ۱ \Rightarrow x = ۰/۸۳ \text{ (متر)}$$

اگر قاعدهٔ اول، در مورد رابطهٔ بین طول قدم با قد انسان، درست باشد؛ طول قدمی که دراین‌جا به‌دست آوردیم، تنها برای کسانی درست است که قد متوسط آن‌ها در حدود ۱۷۵ سانتی‌متر است.

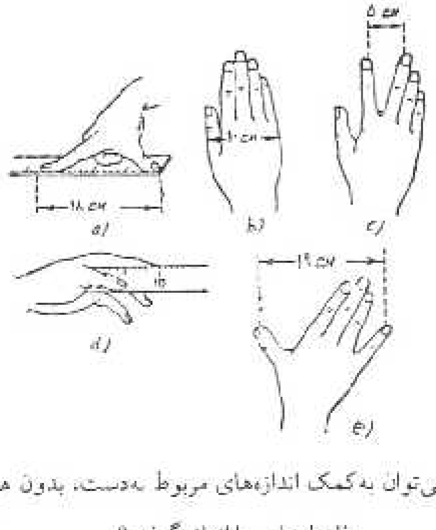
۷۰. مقیاس‌های طبیعی

برای اندازه‌گیری طول چیزهایی که خیلی بزرگ یا کوچک نیستند، می‌توان چنین عمل کرد (البته وقتی که خط‌کش مدرج یا نوار متر در دسترس نباشد): ریسمان یا چوبی را برمی‌داریم و آن را در امتداد یک دست از انتهای انگشتان تا شانهٔ دست دیگر قرار می‌دهیم (باید دست را در امتداد دو شانه بازکرده باشیم)، این فاصله، برای مردان بالغ تقریباً یک متر است. روش دیگر برای به‌دست آوردن یک متر، چنین است: انگشت شصت و انگشت نشانه را تا حدی که ممکن

است از هم دور کنید، ۶ برابر فاصله‌ای که به دست می‌آید، در حدود یک متر است (شکل ۹۴ ـ a).

شما می‌توانید بسیاری از اندازه‌های مربوط به‌دست خود را قبلاً اندازه بگیرید و به‌خاطر بسپارید، به‌این ترتیب می‌توانید با «دست خالی» بسیاری از فاصله‌ها را اندازه بگیرید. درشکل ۹۴، تعدادی از این اندازه‌ها، که برای یک مرد بالغ درست است، نشان داده شده است: فاصلهٔ کف دست (شکل ۹۴ ـ b)، فاصله انگشت نشانه تا انگشت میانه (شکل ۹۴ ـ c)، طول انگشت (شکل ۹۴ ـ d)، طول یک وجب (شکل ۹۴ ـ e).

ولی به‌خاطر داشته باشید که ممکن است این اندازه‌ها برای دست شما درست نباشد و بهتر است که هرکسی اندازه‌های مربوط به‌دست خودش را در خاطر داشته باشد، تا بتواند به‌کمک آن‌ها اندازهٔ تقریبی



شکل ۹۴. چگونه می‌توان به‌کمک اندازه‌های مربوط به‌دست، بدون هیچ وسیلهٔ دیگر، فاصله‌هایی را اندازه گرفت؟

بعضی فاصله‌های کوچک را به‌دست آورد.

۷۱. اندازه‌گیری به‌کمک سکه

از سکه‌های پول‌خُرد هم برای اندازه‌گیری می‌توان استفاده کرد. برای این منظور قبلاً قطر سکه‌های ۱ ریالی، ۲ ریالی، ۵ ریالی، ۱۰ ریالی، ۲۰ ریالی را اندازه بگیرید (مثلاً قطر ۱۰ ریالی خیلی نزدیک به۳ سانتی‌متر است) و آن‌ها را به‌خاطر بسپارید تا در موارد لازم از آن‌ها برای اندازه‌گیری استفاده کنید.

از این سکه‌ها برای محاسبهٔ وزن هم می‌توان استفاده کرد. دراین مورد هم باید قبلاً وزن هریک از این سکه‌ها را با دقت اندازه بگیرید و به‌خاطر بسپارید.

این اندازه‌گیری‌ها را (چه در مورد قطر و چه وزن) انجام دهید و درضمن سعی کنید با کنار گذاشتن دو یا چند تا از آن‌ها، عددهای جالبی برای طول و وزن به‌دست آورید.

۹

معماهای هندسی

برای حل معماهایی که دراین فصل جمع‌آوری شده است، نیازی به‌آگاهی از دورهٔ کامل هندسه نیست و کسی که دارای اطلاعات مقدماتی هندسه باشد، از عهدهٔ حل آن‌ها برخواهد آمد. درحقیقت، معماهایی که دراین‌جا آمده، می‌تواند خواننده را قانع کند که آیا در زمینهٔ مطالبی از هندسه که گمان می‌کند می‌داند، درک درستی دارد یا نه؟ درک واقعی مفهوم‌های هندسه، تنها در شمردن خاصیت‌های مختلف شکل‌ها نیست، بلکه دراین هم هست که چگونه می‌توان از این خاصیت‌ها در عمل و برای حل مسأله‌های واقعی استفاده کرد.

حالا خودتان را امتحان کنید و ببینید از ۲۴ تیری که نشانه می‌روید، چندتای آن به‌هدف هندسی می‌خورد.

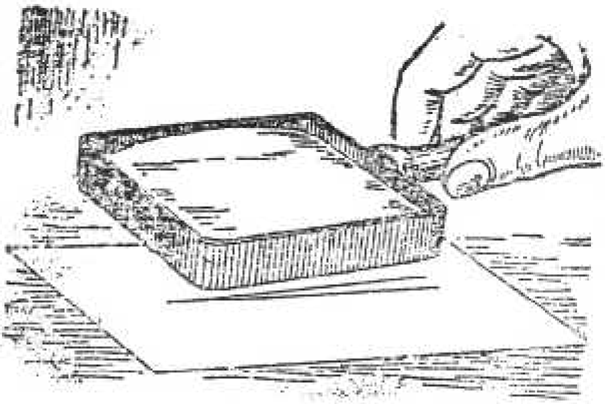
شکل ۹۵. چرا محور جلو بیشتر از محور عقب ساییده می‌شود؟

۷۲. چهارچرخه

چرا محور جلو چهارچرخه بیشتر از محور عقب ساییده می‌شود و زودتر از آن داغ می‌شود (شکل ۹۵)؟

۷۳. زیر ذره‌بین

زاویه‌ای را که مساوی با $1\frac{1}{2}$ درجه است، زیر ذره‌بینی که شیء را ۴ مرتبه بزرگ می‌کند می‌گذاریم. زاویه به‌چه اندازه به‌نظر خواهد رسید (شکل ۹۶)؟



شکل ۹۶. اندازهٔ زاویه چقدر به‌نظر می‌رسد؟

۷۴. تراز نجاری

البته این مطلب را می‌دانید که اگر پایهٔ تراز نجاری تمایل داشته باشد، حباب هوایی که داخل آن است به‌اطرافِ نشانهٔ تراز، حرکت می‌کند (شکل ۹۷). هرچه این تمایل بیشتر باشد، حباب هوا هم بیشتر،از نشانهٔ وسط تراز فاصله می‌گیرد. علت حرکت حباب این است که سبک‌تر از مایعی است که داخل آن قرار گرفته و بنابراین

همیشه روی مایع قرار می‌گیرد. ولی اگر لولهٔ تراز مستقیم باشد، با اندک انحرافی که تراز داشته باشد، حباب تا انتهای لوله، یعنی تا بالاترین قسمت آن بالا می‌رود و روشن است که استفاده از چنین ترازی در عمل خیلی مشکل است.

شکل ۹۷. تراز نجاری

به‌همین مناسبت، همان‌طور که در شکل ۹۷ دیده می‌شود، لولهٔ تراز را منحنی شکل می‌سازند. وقتی که پایهٔ تراز افقی باشد، حباب (که همیشه در بالاترین نقطهٔ لوله می‌ایستد)، درست در وسط قرار می‌گیرد و اگر تراز مایل باشد، دیگر نقطهٔ بالای لوله، وسط آن نخواهد بود و حباب به‌یکی از دو طرف نقطهٔ وسط لوله حرکت می‌کند[1].

مسأله این است که اگر شعاع انحنای لوله یک متر باشد، در حالتی که تراز به‌اندازهٔ نیم درجه تمایل داشته باشد، حباب چند میلی‌متر از علامت وسط دور می‌شود؟

۷۵. تعداد پهلوها

این پرسش، که در برخورد اول خیلی ساده و یا برعکس، بی‌اندازه زیرکانه به‌نظر می‌رسد، چنین است:

«مداد شش پهلو چند سطح دارد؟»

۱. دقیق‌تر باید گفت: «علامت وسط لوله از حباب دور می‌شود»، زیرا حباب در جای خود ثابت می‌ماند و حرکت لوله باعث می‌شود که علامت وسط آن از زیر حباب بلغزد و دور شود

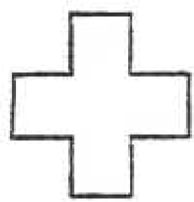
قبل ازاین که به‌جواب نگاه کنید، با دقت دربارهٔ مسأله فکر کنید.

۷۶. هلال ماه

می‌خواهیم هلال ماه را (شکل ۹۸)، با رسم دو خط راست به ۶ قسمت تقسیم کنیم.

دو خط راست را چگونه رسم کنیم؟

شکل ۹۸. هلال ماه



شکل ۹۹. صلیب با ۱۲ چوب کبریت

۷۷. با ۱۲ چوب کبریت

با ۱۲ چوب کبریت می‌توان صلیبی ساخت که مساحت آن برابر با ۵ «کبریت» مربع باشد (شکل ۹۹).

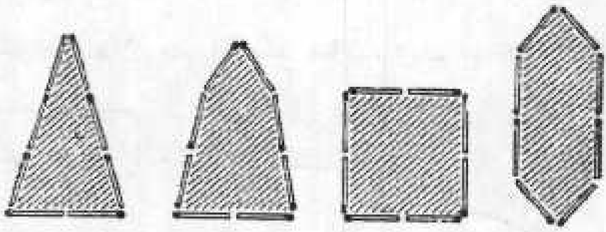
جای چوب کبریت‌ها را طوری تغییر دهید که شکل حاصل، سطحی برابر با ۴ «کبریت» مربع داشته باشد.

برای این‌منظور از وسیله‌های اندازه گیری نباید استفاده کرد.

۷۸. با ۸ چوب کبریت

با ۸ چوب کبریت می‌توان چند ضلعی های مختلفی ساخت که بعضی از آن‌ها در شکل ۱۰۰، رسم شده است و البته مساحت آن‌ها با

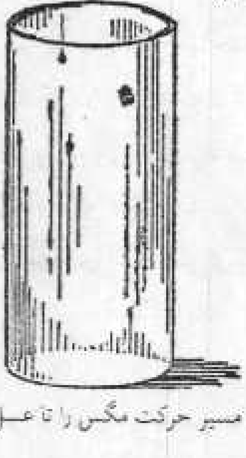
یکدیگر فرق دارد. می‌خواهیم با این ۸ چوب کبریت، شکلی بسازیم که مساحت آن حداکثر ممکن باشد.



شکل ۱۰۰. چگونه می‌توان با ۸ چوب کبریت شکلی با مساحت حداکثر ساخت؟

۷۹. مسیر مگس

در جدار داخلی یک ظرف بلوری استوانه‌ای شکلی، و به‌فاصلهٔ سه سانتی‌متر از لبهٔ بالای ظرف، یک قطره عسل قرار گرفته است. در جدار خارجی این ظرف و درست در نقطهٔ متقاطر عسل، مگسی نشسته است (شکل ۱۰۱)

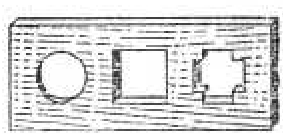


شکل ۱۰۱. مسیر حرکت مگس را تا عسل پیدا کنید.

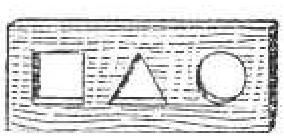
کوتاهترین راهی که مگس می‌تواند طی کند تا به عسل برسد، کدام است؟ ارتفاع ظرف ۲۰ سانتی‌متر و قطر آن ۱۰ سانتی‌متر است. به‌راهی که خود مگس انتخاب می‌کند، اعتماد نداشته باشید و خودتان راهی برای حل مسأله پیدا کنید. برای حل چنین مسأله‌ای درک هندسی لازم است و چنین درکی را از مغز مگس نمی‌توان انتظار داشت.

۸۰ تهیه دریچه

جعبه‌ای داریم (شکل ۱۰۲) که روی آن سه دریچه تعبیه شده است: یکی مربع شکل، دومی مثلثی و سومی گرد. آیا می‌توان دریچه‌ای ساخت که بتواند به‌هر سه شکل باز شود؟



شکل ۱۰۳. دریچه‌ای بسازید که بتواند به‌هر سه‌شکل باز شود.



شکل ۱۰۲. آیا دریچه‌ای وجود دارد که بتواند جانشین این سه دریچه شود؟

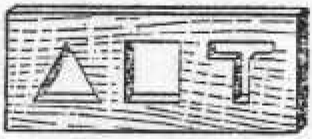
۸۱ دریچهٔ دوم

اگر موفق شده‌اید، مسألهٔ قبل را حل کنید، ببینید می‌توانید دریچه‌ای بسازید، که کار سه دریچهٔ شکل ۱۰۳ را انجام دهد؟

۸۲ دریچه سوم

سرانجام، دراین زمینه هم فکر کنید که آیا می‌توان دریچه‌ای

جانشین سه دریچه شکل ۱۰۴ کرد؟



شکل ۱۰۴. آیا می‌توان به‌جای این سه دریچه، یک دریچه ساخت؟

۸۳. ۵ ریالی را عبور دهید.

دو سکه، یکی پنج ریالی و دیگری ۲ ریالی بردارید؛ روی صفحهٔ کاغذ، دایره‌ای که درست برابر با محیط دو ریالی باشد، رسم کنید و آن را با دقت ببرید و از کاغذ جدا کنید.

چه گمان می‌کنید: آیا می‌توان ۵ ریالی را از این سوراخ عبور داد؟ منظور چشم‌بندی نیست، بلکه یک مسألهٔ واقعی هندسه است.

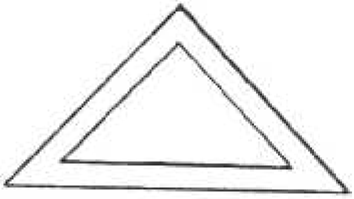
۸۴. ارتفاع برج

در شهر، برج مشهوری هست که شما ارتفاع آن را نمی‌دانید، ولی عکس کارت‌پستال آن، در دسترس شما است. این کارت‌پستال به‌چه ترتیب می‌تواند در محاسبهٔ ارتفاع برج به‌شما کمک کند؟

۸۵. شکل‌های متشابه

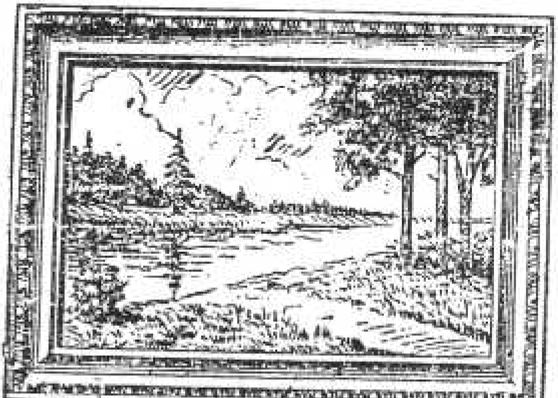
این مسأله مربوط به‌کسانی است که از ویژگی‌های شکل‌های متشابه هندسی، اطلاع دارند. باید به‌دو پرسش زیر جواب داد:

۱ـ آیا در گونیای شکل ۱۰۵، مثلث‌های داخلی و خارجی متشابه‌اند؟



شکل ۱۰۵. آیا مثلث‌های داخلی و خارجی متشابه‌اند؟

۲ـ آیا در قابی که در شکل ۱۰۶ نشان داده شده است، چهار ضلعی‌های داخلی و خارجی متشابه‌اند؟



شکل ۱۰۶. آیا مستطیل‌های داخلی و خارجی، متشابه‌اند؟

۸۶. سایهٔ سیم

اگر سیم تلگراف به‌قطر ۴ میلی‌متر باشد، در یک روز آفتابی سایهٔ کامل آن در فضا چه‌قدر طول خواهد داشت؟

۸۷. آجر

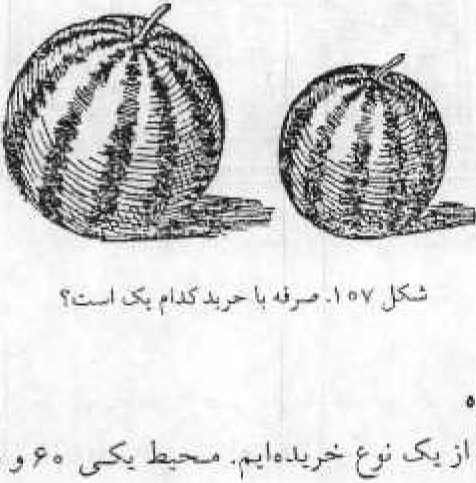
یک آجر ساختمانی، ۴ کیلوگرم وزن دارد، حالا اگر آجری با همان مصالح داشته باشیم، که همهٔ اندازه‌های آن ۴ مرتبه کوچک‌تر از آجر ساختمانی باشد، وزن آن چه‌قدر خواهد بود؟

۸۸. لندوک و کوتوله

آدمی که دو متر قد دارد، به‌تقریب چقدر سنگین‌تر از کوتوله‌ای است که قدی برابر با یک متر دارد؟

۸۹. دو هندوانه

دو هندوانه با اندازه‌های مختلف خریده‌ایم، یکی از آن‌ها به‌اندازهٔ یک چهارم از دیگری بزرگ‌تر و قیمت آن ۱/۵ برابر آن بود (شکل ۱۰۷). صرفه، با خرید کدام یک است؟



شکل ۱۰۷. صرفه با خرید کدام یک است؟

۹۰. دو خربزه

دو خربزه از یک نوع خریده‌ایم. محیط یکی ۶۰ و دیگری ۵۰

سانتی‌متر است، قیمت اولی یک برابر و نیم دومی شده است. صرفه با خرید کدام یک است؟

۹۱. گیلاس

قسمت گوشتی گیلاس چنان به‌هستهٔ آن محکم چسبیده است که به‌سختی از آن جدا می‌شود. اگر هم هسته و هم تمام آن را به‌شکل کره فرض کنیم، آیا می‌توانید پیش خودتان فکر کنید حجم قسمت گوشتی گیلاس چند برابر حجم هستهٔ آن است؟

۹۲. نمونهٔ برج ایفل

برج ایفل در پاریس ۳۰۰ متر ارتفاع دارد، این برج تماماً از آهن ساخته شده و در حدود ۸٬۰۰۰٬۰۰۰ کیلوگرم آهن، در ساختمان آن به‌کار رفته است. حالا ما می‌خواهیم برجی از روی نمونهٔ برج ایفل بسازیم که درآن تنها یک کیلوگرم آهن مصرف شود. ارتفاع این برج چقدر خواهد بود؟ از یک لیوان بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟

۹۳. دو عدد دیگ

دو دیگ مسی داریم که به‌یک شکل‌اند و دیواره‌های آن‌ها با یک ضخامت ساخته شده است. گنجایش اولی ۸ برابر دومی است. دیگ اول چند برابر دیگ دوم وزن دارد؟

۹۴. در هوای سرد

یک مرد با بچه‌اش در هوای سرد ایستاده‌اند، اگر هردو یک‌جور

لباس پوشیده باشند، کدام‌یک بیشتر سردشان می‌شود؟

۹۵. قند.

اگر دو لیون برابر داشته باشیم و یکی را پر از شکر و دیگری را پر از حبه‌های قند کلوخه کرده باشیم، کدام یک سنگین‌تر است؟

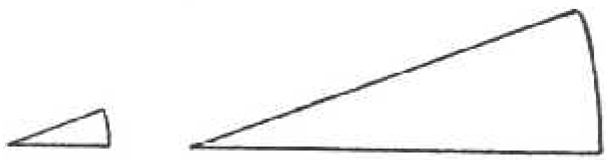
***

حل معماهای ۷۲ تا ۹۵

۷۲ در برخورد اول چنین به‌نظر می‌رسد که این مسأله ارتباطی با هندسه ندارد، ولی تسلط براین علم به‌ما امکان می‌دهد که بتوانیم مبانی هندسی این مسأله را، که احتمالاً زیر پوشش‌های دیگری مخفی شده است، کشف کنیم. مسأله مورد نظر هم بدون تردید، یک مسألهٔ هندسی است و بدون اطلاع از هندسه نمی‌توان آن را حل کرد.

حالا، چرا محور جلو چهار چرخه بیشتر از محور عقب آن ساییده می‌شود؟ همه می‌دانند که چرخ‌های جلو کوچک‌تر از چرخ‌های عقب آن است. دریک فاصلهٔ معین، چرخ کوچک‌تر بیشتر از چرخ بزرگ‌تر خواهد چرخید: چون چرخ کوچک‌تر محیط کم‌تری دارد و بنابراین بیشتر دور خودش می‌چرخد. اکنون روشن است که در هر مسافتی که چهار چرخه طی می‌کند، چرخ‌های جلو آن بیشتر از چرخ‌های عقب آن، دور محور خود حرکت می‌کنند و بنابراین محور جلو بیشتر از محور عقب ساییده می‌شود.

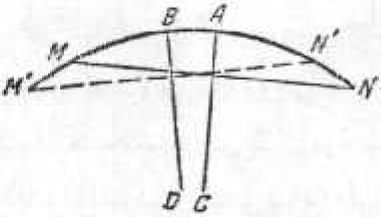
۷۳. اگر گمان می‌کنید که زاویهٔ زیر ذره‌بین ۴ مرتبه بزرگ و برابر با $۱\frac{۱}{۲} \times ۴ = ۶^\circ$ می‌شود، اشتباه می‌کنید. وقتی که زاویه‌ای زیر ذره‌بین دیده شود، اندازه آن هیچ تغییری نمی‌کند. درحقیقت طول قوسی که زاویه تحت آن دیده می‌شود، بزرگ می‌شود، ولی هرچه‌قدر که شعاع دایره بزرگ شود، زاویه مرکزی آن تغییر نخواهد کرد. در شکل ۱۰۸ این مطلب به‌خوبی دیده می‌شود.



شکل ۱۰۸

۷۴. شکل ۱۰۹ را در نظر می‌گیریم: MAN وضع اولیهٔ قوس تراز و $M'BN'$ وضع جدید آن است و وتر $M'N'$ با وتر MN زاویهٔ نیم درجه ساخته است. درحالت اول حباب در نقطهٔ A بود و حالا هم درهمین نقطه است. تنها وسط قوس MN به‌نقطه B منتقل شده است. به‌این ترتیب، باید طول قوس AB را که شعاع آن یک متر و اندازهٔ آن برحسب درجه برابر با نیم درجه است محاسبه کنیم.

(با توجه به‌این قضیه: «اندازهٔ دو زاویه که ضلع‌های آن‌ها برهم عمود باشند، با یکدیگر برابرند»، می‌توان نتیجه گرفت که قوس AB مساوی نیم‌درجه است).



شکل ۱۰۹

محاسبه مشکل نیست. طول محیط دایره‌ای که شعاع آن ۱ متر (۱۰۰۰ میلی‌متر) باشد، برابر است با:

$$۲ \times ۳/۱۴ \times ۱۰۰۰ = ۶۲۸۰\, mm$$

و چون محیط دایره مساوی ۳۶۰ درجه و یا ۷۲۰ نیم‌درجه است، بنابراین طول قوس AB چنین می‌شود:

$$۶۲۸۰ : ۷۲۰ = ۸/۷\, mm$$

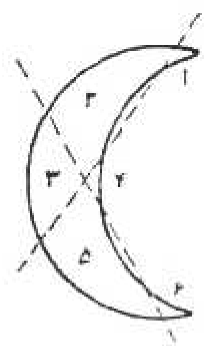
حباب از علامت وسط تراز (و یا صحیح‌تر: علامت وسط تراز از حباب) نزدک به ۹ میلی‌متر (تقریباً یک سانتی‌متر) دور می‌شود. این مطلب هم روشن است که هرچه شعاع انحنای لوله تراز بیشتر باشد، حساسیت بیشتری خواهد داشت.

۷۵. این مسأله به‌هیچ وجه شوخی نیست و مربوط به‌اشتباهی است که احتمالاً به‌خاطر نام آن رخ خواهد داد. مداد «شش پهلو» دارای ۶ سطح نیست، بلکه دارای ۸ سطح است (به‌شرطی که آن‌را نتراشیده باشند): شش سطح در اطراف و دو سطح در بالا و پایین. اگر مداد دارای ۶ سطح بود، به‌شکل میله‌ای در می‌آمد که مقطع آن یک چهار ضلعی بود.

معمول است که در منشور فقط تعداد سطح‌های جانبی (یا

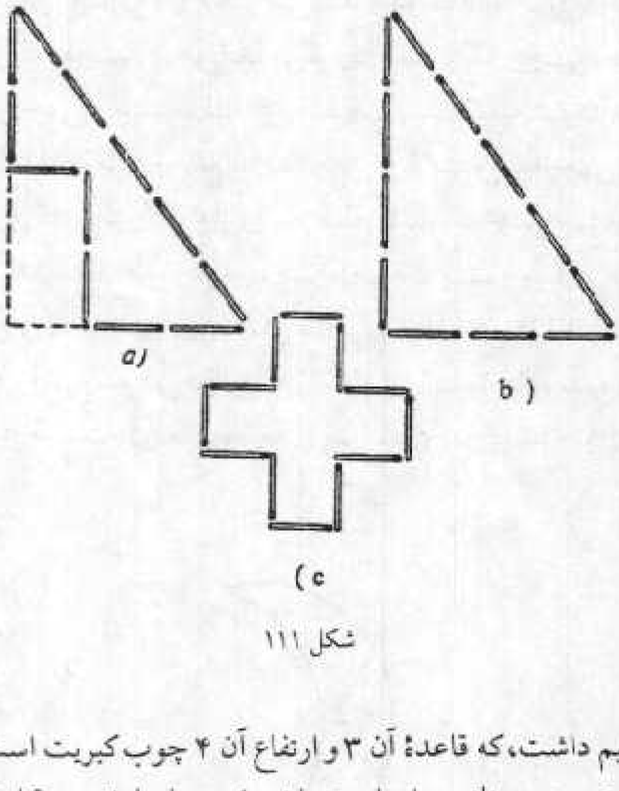
وجه‌های جانبی) را ذکر می‌کنند و دو قاعدهٔ آن را به‌حساب نمی‌آورند. دربسیاری موردها می‌گویند: منشور سه وجهی، منشور چهاروجهی و غیره، که در حقیقت باید گفته شود: منشور مثلث‌القاعده، منشور مربع‌القاعده و غیره والامنشور سه‌وجهی، یعنی منشوری که به‌طورکلی دارای سه سطح باشد، که چنین چیزی اصلاً وجود ندارد. مداد مورد بحث مسأله هم یک منشور مسدس‌القاعده (منشوری که قاعده‌های آن شش ضلعی هستند) می‌باشد.

۷۶. روش رسم این دو خط در شکل ۱۱۰ نشان داده شده است، درضمن قسمت‌های مختلف هلال هم شماره‌گذاری شده‌اند.



شکل ۱۱۰

۷۷. چوب‌کبریت‌ها باید به‌وضعی که در شکل ۱۱۱ ـ a نشان داده شده است قرار گیرند، تا مساحت شکل برحسب «کبریت» مربع برابر با مقدار مورد نظر بشود. چه‌طور می‌توان این مطلب را تحقیق کرد؟ ابتدا صلیب را به‌شکل مثلث درمی‌آوریم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای



شکل ۱۱۱

خواهیم داشت، که قاعدهٔ آن ۳ و ارتفاع آن ۴ چوب کبریت است[1]. مساحت چنین مثلثی برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع آن:

$$\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = ۶$$

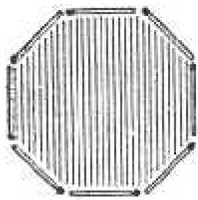
یعنی سطح این مثلث ۶ برابر سطح مربعی است که هر ضلع آن یک چوب کبریت باشد (شکل ۱۱۱ ـ b)، ولی شکل ۱۱۱ ـ a همان

۱. بدون تردید خواننده از «قضیه فیثاغورث» اطلاع دارد. همین قضیه است که ما را مطمئن به‌وجود مثلث قائم‌الزاویه می‌کند:

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

مثلث است که به‌اندازهٔ دو برابر مربع مذکور از سطح آن کم شده است و بنابراین سطحی برابر با ۴ «کبریت» مربع خواهد داشت.

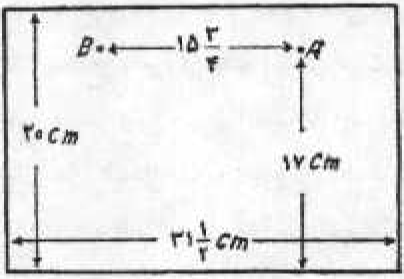
۷۸. می‌توان ثابت کرد که از میان همهٔ شکل‌های مسطحه‌ای که محیط برابر دارند، سطح دایره از بقیه بیشتر است. با چوب‌کبریت نمی‌توان دایره ساخت، ولی می‌توان با ۸ چوب کبریت شکلی ساخت که بیش از سایر شکل‌ها، به‌دایره نزدیک باشد (شکل ۱۱۲). و این یک ۸ ضلعی منتظم است. به‌این ترتیب، بین شکل‌های مسطحه‌ای که با ۸ چوب کبریت می‌توان ساخت، ۸ ضلعی منتظم تنها شکلی است که سطح آن از بقیه بیشتر است (این سطح برابر با ۲(۱ + √۲)، یعنی نزدیک به ۵ «کبریت» مربع می‌شود ـ م.).



شکل ۱۱۲

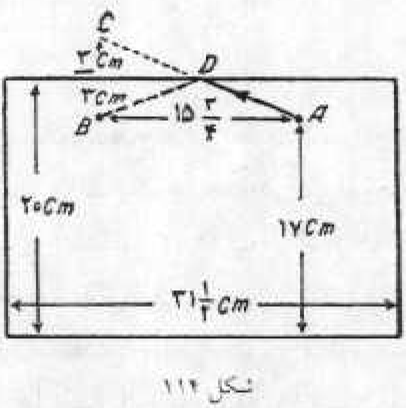
۷۹. برای حل مسأله، سطح جانبی ظرف استوانه‌ای شکل خود را باز می‌کنیم و به‌صورت یک صفحه در می‌آوریم: یک مستطیل به‌دست خواهیم آورد (شکل ۱۱۳) که ارتفاع آن ۲۰ سانتی‌متر و قاعدهٔ آن برابر محیط دایرهٔ ظرف، یعنی $۱۰ \times ۳\frac{۱}{۷} = ۳۱\frac{۱}{۲}$ (تقریباً) می‌باشد. روی این مستطیل جای مگس و قطرهٔ عسل را علامت می‌گذاریم: مگس در نقطهٔ A و به‌فاصلهٔ ۱۷ سانتی‌متر از قاعده، و

قطره عسل در نقطهٔ B و به‌همان فاصله از قاعده، و به‌فاصله $15\frac{3}{4}$ سانتی‌متر (نصف محیط دایرهٔ ظرف) از نقطهٔ A قرارگرفته است.



شکل ۱۱۳

حالا باید نقطه‌ای از لبهٔ ظرف را پیداکرد که مگس ضمن عبور از آن به‌جدار داخلی ظرف وارد شود. از نقطهٔ B (شکل ۱۱۴) عمودی برضلع مستطیل فرود آورده و به‌اندازه خودش امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ C به‌دست آید، از نقطهٔ C به A وصل می‌کنیم تا ضلع مستطیل را در D قطع کند. نقطهٔ D همان جایی است که مگس باید ضمن عبور از



شکل ۱۱۴

آن به‌جدار داخلی ظرف وارد شود. دراین‌صورت طول ADB کوتاه‌ترین مسیر ممکن خواهد بود.

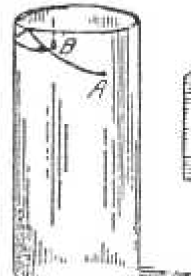
حالا که کوتاه‌ترین راه را روی مستطیل پیدا کردیم، دوباره آن را به‌صورت استوانه در می‌آوریم تا مسیر واقعی مگس برای رسیدن به‌قطرهٔ عسل برای ما معلوم شود (شکل ۱۱۵).

آیا مگس درچنین موردی همین راه را انتخاب خواهد کرد؟ برای ما روشن نیست. ممکن است که مگس هم با پیروی از غریزهٔ خود واقعاً کوتاه‌ترین راه را انتخاب کند، ولی احتمال آن کم است. غریزه‌هایی از این قبیل، کاملاً دقیق نیستند.

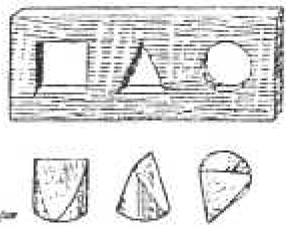
۸۰. دریچه‌ای این‌چنین، وجود دارد و در شکل ۱۱۶ نشان داده شده است. از شکل به‌خوبی دیده می‌شود که دریچه می‌تواند به‌هر سه‌نوع مربعی، مثلثی و دایره‌ای باز شود.

۸۱. برای این سه نوع هم دریچه‌ای وجود دارد که در شکل ۱۱۷، نشان داده شده است: گرد، مربعی و صلیبی.

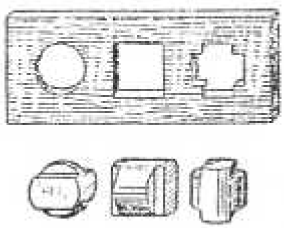
۸۲. این دریچه هم وجود دارد و شما می‌توانید آن را از سه جهت



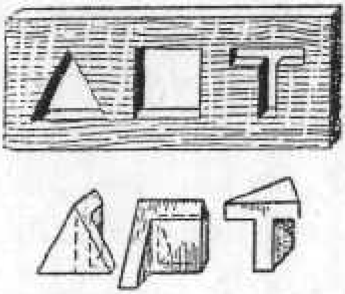
شکل ۱۱۵



شکل ۱۱۶



شکل ۱۱۷



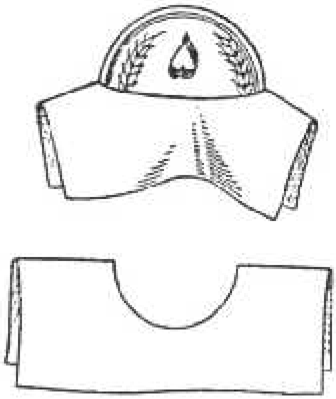
شکل ۱۱۸

مختلف در شکل ۱۱۸ ببینید.

در رسم، به‌این نوع مسأله‌ها زیاد برخورد می‌کنیم و اغلب لازم است که مثلاً با در دست داشتن ۳ «تصویر» از یک قطعه مربوط به‌ماشین، آن را معین کنیم.

۸۳. اگرچه به‌نظر عجیب است، ولی می‌توان ۵ ریالی را از چنین سوراخ کوچکی عبور داد. فقط باید به‌روش زیر عمل کنیم: کاغذ را چنان خم می‌کنیم که سوراخ گرد به‌صورت شکاف مستقیمی درآید (شکل ۱۱۹) از چنین سوراخی ۵ ریالی عبور خواهد کرد.

محاسبهٔ ساده هندسی می‌تواند ما را دراین زمینه قانع کند. قطر سکهٔ دو ریالی برابر با ۲۲ میلی‌متر است و بنابراین محیط آن بیش از ۶۹ میلی‌متر خواهد شد. طول سوراخی که به‌شکل مستقیم درآید، برابر نصف محیط این دایره، یعنی بیش از ۳۴ میلی‌متر خواهد بود. ولی قطر ۵ ریالی فقط ۲۶ میلی‌متر است و بنابراین حتا اگر کلفتی آن را که در حدود ۱/۵ میلی‌متر است، در نظر بگیریم، می‌تواند از سوراخی به‌طول ۳۴ میلی‌متر خارج شود.

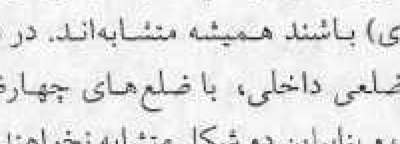


شکل ۱۱۹

۸۴. برای این‌که بتوانیم با کمک عکس برج، ارتفاع طبیعی آن را پیدا کنیم، قبل از همه باید اندازهٔ ارتفاع و قاعدهٔ برج را روی عکس کارت‌پستال، با دقت ممکن، اندازه بگیریم. فرض می‌کنیم ارتفاع برج روی عکس برابر با ۹۵ میلی‌متر و طول قاعده آن ۱۹ میلی‌متر باشد. حالا باید طول قاعدهٔ برج واقعی را اندازه بگیریم. این طول را هم برابر با ۱۴ متر فرض می‌کنیم. اکنون می‌توان این‌طور استدلال کرد:

برجی که در عکس دیده می‌شود با نمونهٔ اصلی آن، دو شکل متشابه نسبت به‌یکدیگر هستند. بنابراین ارتفاع برج تصویر هرچند برابر قاعدهٔ آن باشد، در برج واقعی هم، ارتفاع، همان‌قدر برابر قاعده‌اش خواهد بود. نسبت اول برابر با ۱۹ : ۹۵، یعنی ۵ است و بنابراین نتیجه می‌گیریم، که ارتفاع برج طبیعی هم، ۵ برابر طول قاعدهٔ آن، یعنی $۷۰m = ۵ \times ۱۴$ می‌باشد. به‌این ترتیب ارتفاع برج شهر، برابر با ۷۰ متر می‌شود.

۸۵. اغلب به‌هر دو پرسشی که در مسأله طرح شده است، جواب مثبت می‌دهند. درحقیقت فقط مثلث‌ها متشابه هستند و درحالت کلی چهار ضلعی‌های داخلی و خارجی قاب با یکدیگر متشابه نیستند. برای تشابه دو مثلث کافی است که زاویه‌های آن‌ها، با یکدیگر برابر باشند و از آن‌جا که ضلع‌های دو مثلث داخلی و خارجی با هم موازی‌اند، دو شکل متشابه می‌شوند. ولی در مورد شکل‌های دیگر تنها برابری زاویه‌ها (و یا به‌زبان دیگر، تنها موازی‌بودن ضلع‌ها) برای تشابه دو شکل کافی نیست. بلکه درعین حال لازم است، ضلع‌های دو شکل متناسب باشند، در مورد چهار ضلعی‌های داخلی و خارجی قاب، تنها در موردی که مربع (و یا به‌طور کلی لوزی) باشند همیشه متشابه‌اند. در سایر حالت‌ها، ضلع‌های چهارضلعی داخلی، با ضلع‌های چهارضلعی خارجی متناسب نیستند، و بنابراین دو شکل متشابه نخواهند بود. عدم تشابه مستطیل‌های داخلی و خارجی، در شکل ۱۲۰ به روشنی دیده می‌شود. درقاب سمت چپ، ضلع‌های مستطیل خارجی، بر نسبت ۲:۱ و ضلع‌های مستطیل داخلی، بر نسبت ۴:۱ هستند و در قاب سمت راست ضلع‌های مستطیل خارجی، برنسبت ۴:۳ و ضلع‌های مستطیل داخلی، بر نسبت ۲:۱ می‌باشند.



شکل ۱۲۰

۸۶. شاید برای خیلی‌ها عجیب باشد که، برای حل این مسأله، به‌بعضی آگاهی‌های نجومی احتیاج است: باید فاصلهٔ زمین تا خورشید و هم‌چنین قطر خورشید را بدانیم.

طول سایهٔ کامل سیم که در فضا به‌وجود می‌آید، از نظر ساختمان هندسی در شکل ۱۲۱ نشان داده شده است.

شکل ۱۲۱

نسبت طول سایه سیم، برقطر آن، برابر است با نسبت فاصلهٔ زمین تا خورشید (۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰ کیلومتر) بر قطر خورشید (۱۴۰۰۰۰۰ کیلومتر) نسبت دو عدد اخیر، به‌تقریب برابر با ۱۱۵ می‌باشد و بنابراین، طول سایهٔ کامل سیم در فضا، چنین خواهد شد:

$$۴ \times ۱۱۵ = ۴۶۰mm = ۴۶cm$$

طول ناچیز سایهٔ کامل، این مطلب را روشن می‌کند که چرا روی زمین و یا دیوار خانه‌ها، به‌چشم نمی‌خورد و در حقیقت طرح ضعیفی از سایه، که دیده می‌شود، مربوط به سایهٔ کامل سیم نیست، بلکه مربوط به‌نیم سایهٔ آن است.

۸۷. اگر گمان کنیم، که آجر کوچک ۱ کیلوگرم، یعنی $\frac{۱}{۴}$ آجر بزرگ، وزن دارد، اشتباه کرده‌ایم. در حقیقت آجر کوچک در هر بعد خود، $\frac{۱}{۴}$ آجر بزرگ است و بنابراین حجم آن $۶۴ = ۴ \times ۴ \times ۴$ مرتبه کوچک‌تر

از آجر اصلی است. بنابراین وزن آجر کوچک برابر با ۶۴ : ۴۰۰۰، یعنی ۶۲/۵گرم خواهد بود.

۸۸. شما دیگر برای حل این مسأله کاملاً آماده هستید. زیرا انواع مختلف بدن آدمی، تقریباً متشابه یک‌دیگرند و بنابراین اگر قد یکی دو برابر دیگری باشد، حجمش نه دو برابر، بلکه ۸ برابر او خواهد بود. بنابراین، کسی که دو متر قد دارد، وزنی ۸ برابر کسی که قدش یک متر است، خواهد داشت.

بلندترین آدمی که دربارهٔ او اطلاع داریم، یکی از اهالی آلزاس است، که ۲۷۵ سانتی‌متر، یعنی درست یک متر بیش از آدمی معمولی، بلندی دارد. کوتاه‌ترین فرد هم ۴۰ سانتی‌متر، یعنی حدود $\frac{۱}{۷}$ اولی قد دارد. بنابراین اگر در یک کفه ترازو لندوک آلزاسی را قرار دهیم، برای تعادل باید در کفه دیگر، ۳۴۳ = ۷ × ۷ × ۷، کوتوله قرار بگیرد.

۸۹. حجم هندوانه‌بزرگ‌تربرابربا:

$$۱\frac{۱}{۴} \times ۱\frac{۱}{۴} \times ۱\frac{۱}{۴} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$$

یعنی تقریباً دو برابر حجم هندوانهٔ کوچک‌تر است، درنتیجه، صرفه با خرید هندوانهٔ بزرگ‌تر است؛ زیرا نزدیک به‌دو برابر هندوانه کوچک‌تر وزن دارد، ولی قیمتش، تنها یک برابر و نیم آن است. پس چرا فروشنده، هندوانهٔ بزرگ‌تر را به‌جای دو برابر به‌یک برابر و نیم قیمت فروخته است؟ علت آن واضح است. فروشنده در اکثر موارد، از هندسه اطلاع ندارد. ولی معمولاً خریدار هم از هندسه اطلاع ندارد و به‌همین مناسبت، اغلب از این سود، صرف‌نظر می‌کند. می‌توان با اطمینان قضاوت کرد که اگر خرید به‌این‌ترتیب انجام گیرد، همیشه

صرفه با هندوانه‌های بزرگ است. ولی بیشتر خریداران، به‌این امر توجهی ندارند.

به‌همین دلیل در مورد تخم‌مرغ هم، همیشه صرفه با خرید تخم‌مرغ‌های بزرگ است. البته به‌شرطی که آن‌ها را کیلویی نفروشند.

۹۰. نسبت محیط‌ها برابر با نسبت قطرهای آن‌ها است. وقتی که محیط یکی از خربزه‌ها ۶۰ و دیگری ۵۰ سانتی‌متر است؛ نسبت قطرهای آن‌ها: $\frac{۶}{۵} = ۵۰ : ۶۰$ و نسبت حجم‌های آن‌ها برابر با:

$$\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۳} = \frac{۲۱۶}{۱۲۵} = ۱/۷۳$$

خواهد بود؛ به‌این ترتیب، اگر قرار باشد قیمت خربزه را برحسب حجم و یا وزن آن تعیین کنیم، قیمت خربزهٔ بزرگ‌تر ۱/۷۳ برابر قیمت خربزهٔ کوچک‌تر، یعنی ۷۵٪ گران‌تر از آن می‌شود. درحالی که ما آن را فقط ۵۰٪ گران‌تر خریده‌ایم و روشن است که صرفه با خرید خربزهٔ بزرگ‌تر است.

۹۱. قطرگیلاس تقریباً سه برابر قطر هستهٔ آن است و بنابراین حجم گیلاس ۳ × ۳ × ۳، یعنی ۲۷ برابر حجم هستهٔ آن می‌باشد. به‌این ترتیب حجم هسته، $\frac{۱}{۲۷}$ حجم گیلاس، و حجم قسمت گوشتی آن $\frac{۲۶}{۲۷}$ حجم گیلاس است، یعنی حجم قسمت گوشتی ۲۶ برابر حجم هستهٔ گیلاس است.

۹۲. وقتی که برج کوچک نمونه، ۸۰۰۰۰۰۰ مرتبه سبک‌تر از برج اصلی است، و درضمن از یک جنس هم ساخته شده‌اند، باید حجم برج نمونه هم ۸۰۰۰۰۰۰ مرتبه کم‌تر از حجم برج اصلی باشد. و این مطلب را می‌دانیم که نسبت حجم‌های دو جسم متشابه، برابر با مکعب نسبت ارتفاع‌های آن‌ها است. به‌این ترتیب ارتفاع برج نمونه، $\frac{۱}{۲۰۰}$ ارتفاع برج اصلی می‌شود، زیرا:

$$۲۰۰ \times ۲۰۰ \times ۲۰۰ = ۸۰۰۰۰۰۰$$

ارتفاع برج اصلی، ۳۰۰ متر است و به‌سادگی می‌توان ارتفاع برج نمونه را به‌دست آورد:

$$۳۰۰ : ۲۰۰ = ۱\frac{۱}{۲} \text{ (متر)}$$

برج نمونه ارتفاعی به‌اندازه یک مرد کامل خواهد داشت.

۹۳. دو دیگ، از نظر هندسی دو جسم متشابه می‌باشند. وقتی، دیگ بزرگ‌تر، ۸ برابر دیگ کوچک‌تر گنجایش دارد، همهٔ اندازه‌های خطی آن دو برابر دیگ کوچک‌تر خواهد بود: یعنی ارتفاع و پهنایی دو برابر آن دارد. به‌این ترتیب سطح کل دیگر بزرگ‌تر، ۲×۲ یعنی چهار برابر سطح کل دیگر کوچک‌تر می‌شود. زیرا نسبت دو سطح متشابه بر نسبت مجذورهای اندازه‌های خطی آن‌ها است. و چون ضخامت دیواره‌های دو دیگ یکی است، نسبت وزن‌های آن‌ها برنسبت سطح کل آن‌ها است و درنتیجه، دیگ بزرگ‌تر ۴ برابر دیگر کوچک‌تر، وزن خواهد داشت.

۹۴. این مسأله هم (که در نگاه اول بدون ارتباط با ریاضیات به‌نظر می‌رسد) مثل مسألهٔ قبل، با استدلال هندسی حل می‌شود. قبل از این که به‌حل مسأله بپردازیم، مسألهٔ دیگری را که شبیه آن، ولی ساده‌تر از آن است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

دو کتری (یا دو سماور)، که یکی بزرگ‌تر از دیگری است، از یک جنس و به‌یک شکل ساخته شده‌اند. اگر آن‌ها را پر از آب جوش کنیم، کدام یک زودتر خنک می‌شود؟

هر چیز، به‌طور عمده، ابتدا از سطح خود سرد می‌شود. بنابراین، آن کتری زودتر سرد می‌شود که به‌هر واحد حجم آن، سطح بیشتری تعلق بگیرد. اگر یکی از کتری‌ها در پهنا و ارتفاع، n برابر دیگری باشد،

سطح آن n^2 برابر و حجمش n^3 برابر کتری کوچک‌تر خواهد بود. بنابراین اگر حجمی را که به‌هر واحد سطح در دو کتری مربوط می‌شود، در نظر بگیریم، در کتری بزرگ‌تر، n برابر کتری کوچک‌تر خواهد بود. به‌این ترتیب، کتری کوچک‌تر زودتر سرد می‌شود. به‌همین علت، بچه‌ای هم که در هوای سرد ایستاده، باید بیشتر از مردی که مثل او لباس پوشیده است، احساس سرما کند: مقدار گرمایی که در هرسانتی‌متر مکعب بدن تولید می‌شود، تقریباً در هردو نفر یکی است، ولی سردی هوا که از طریق سطح به‌هر سانتی‌متر مکعب بدن می‌رسد، در بچه، بیشتر از مرد بالغ است.

حالا می‌فهمیم که چرا انگشتان دست یا پا بیشتر از سایر قسمت‌های بدن، سرد می‌شوند و زودتر سرمازدگی پیدا می‌کنند. درحقیقت، سطح انگشتان در مقایسهٔ با حجم آن‌ها، زیاد نیست.

و حالا می‌توانیم مسأله زیر را هم مطرح کنیم:

چرا شاخهٔ نازکی که از یک کندهٔ هیزم جدا شده است، زودتر از خود کنده می‌سوزد؟

حرارت از طریق سطح وارد می‌شود، و سپس به‌تمام حجم نفوذ می‌کند. بنابراین باید سطح و حجم شاخهٔ چوب را، با سطح و حجم کندهٔ درخت که همان طول را دارد، مقایسه کنیم و ببینیم درهر حالت چه مقدار سطح به‌یک سانتی‌متر مکعب چوب تعلق می‌گیرد. اگر قطر کنده ۱۰ برابر قطر شاخه باشد، سطح جانبی کنده هم ۱۰ برابر سطح جانبی شاخه و حجم آن ۱۰۰ برابر حجم شاخهٔ درخت خواهد بود. درنتیجه، حجمی که به‌هر واحد سطح، از شاخه تعلق می‌گیرد، ۱۰ مرتبه کم‌تر از کندهٔ درخت است: به‌همین مناسبت، وقتی، شاخه و کندهٔ درخت در معرض حرارت‌های برابر قرار گیرند، شاخه خیلی

زودتر از کنده خواهد سوخت (با توجه به‌این که‌چوب هادی بدی، برای حرارت است، نسبت بالا را باید تقریبی دانست).

۹۵. این مسأله، که در ابتدای امر پیچیده به‌نظر می‌رسد، با بعضی شرایط به‌سادگی تمام حل خواهدشد. برای سهولت، فرض می‌کنیم که قطر هرقطعه حبهٔ قند، ۱۰۰ برابر قطر یک دانهٔ شکر باشد. حالا فرض می‌کنیم که قطر همه دانه‌های شکر، همراه با استکانی که در آن قرار گرفته‌اند، صد مرتبه بزرگ شود. دراین صورت، گنجایش استکان ۱۰۰ × ۱۰۰ × ۱۰۰ مرتبه زیاد می‌شود و بنابراین مقدار قندی هم که درآن است، یک میلیون مرتبه زیاد می‌شود. حالا یک استکان معمولی را که محتوی همین قطعات بزرگ شکر باشد، در نظر می‌گیریم. این استکان، یک میلیونیم استکان بزرگ ماگنجایش خواهد داشت. البته وزن چنین استکانی برابر با وزن استکان معمولی خواهد بود، که محتوی آن حبهٔ قند باشد: به‌این ترتیب، روشن می‌شود که وزن استکان محتوی حبه‌های قند، برابر با وزن استکانی است که پر از شکر باشد.

اگر قطر حبهٔ قند را به‌جای صد برابر، شصت برابر قطر شکر (و یا مضرب دیگری از آن) درنظر می‌گرفتیم، وضع تغییر نمی‌کرد، استدلال تنها براین مبنا قرار دارد که حبه‌های قند از نظر هندسی، متشابه با دانه‌های شکر در نظر گرفته شده و به‌وضع مشابهی هم، روی یکدیگر قرارگرفته‌اند. البته این فرض، کاملاً درست نیست. ولی تا حد زیادی به‌حقیقت نزدیک است (به‌شرطی که صحبت از حبه‌های قند باشد و نه قند ماشینی).

۱۰

هندسهٔ برف و باران

۹۶. باران‌سنج

معمولاً لنین‌گراد را شهر بارانی به‌حساب می‌آورند، خیلی بارانی‌تر از شهری مثل مسکو. ولی دانشمندان، چیز دیگری می‌گویند: آن‌ها تأکید می‌کنند که درطول سال در مسکو، بیش از لنین‌گراد باران می‌بارد. این نتیجه را از کجا به‌دست می‌آورند؟ آیا می‌توان مقدار آبی که در اثر باران جمع می‌شود، اندازه گرفت؟ با وجودی که حل این مسأله مشکل به‌نظر می‌رسد، ولی شما هم می‌توانید راه «آمارگیری» باران را یاد بگیرید. خیال نکنید که برای این‌کار، باید تمام آب‌های باران یک منطقهٔ بارانی را، دریک‌جا جمع کرد، بلکه کافی است که ارتفاع آبی را که به‌این مناسبت روی زمین جمع می‌شود، اندازه‌گرفت؛ به‌شرطی که زمین مورد نظر، که آب درآن جمع می‌شود، نه آب را به‌خود جذب کند و نه به‌جای دیگری نفوذ دهد. این هم کار مشکلی نیست. وقتی که دریک منطقه باران ببارد، مقدار آب آن در تمام منطقه یکی است و دریک نقطه بیشتر از نقطهٔ دیگر نخواهد بود. بنابراین، برای این‌که ارتفاع آب را در منطقه‌ای که باران می‌بارد، اندازه بگیریم، کافی است که آن را در ناحیهٔ غیرمشخصی اندازه بگیریم.

حالا شما احتمالاً حدس می‌زنید،برای اندازه‌گیری ارتفاع آبی که دراثر باران به‌وجود می‌آید، چگونه باید عمل کرد. باید قطعه زمین کوچکی انتخاب کرد که وقتی باران در آن جمع می‌شود، نه به‌زمین فرو رود و نه به‌جای دیگری جریان پیدا کند. برای این‌کار بهتر است، از یک ظرف پوشیده (مثلاً یک سطل یا طشت) استفاده کرد. اگر سطل یا طشتی، با دیواره‌های عمودی دراختیار دارید (باید بالا و پایین آن یکنواخت باشد، مثلاً به‌شکل استوانه)، آن را درجای باز و در معرض باران قرار دهید[1].

وقتی باران تمام شد، ارتفاع آب را در سطل اندازه بگیرید و آن را برای محاسبهٔ کلی جایی یادداشت کنید.

حالا ببینیم ارتفاع آب را در سطل چگونه اندازه بگیریم؟ آیا خط‌کش مدرج را وارد آن کنیم؟ استفاده از خط‌کش مدرج، وقتی ساده است که در سطل آب زیادی جمع شده باشد. ولی وقتی ارتفاع آب بیش از دو یا سه سانتی‌متر و یا حتا میلی‌متر نباشد (که اکثراً هم همین اندازه است)، نمی‌توان از خط‌کش به‌عنوان یک وسیلهٔ دقیق استفاده کرد. این مطلب هم روشن است، که دراین اندازه‌گیری، هرمیلی‌متر و حتا هرکسری از میلی‌متر هم ارزش زیادی دارد. پس چه باید کرد؟

بهترین راه این است که آب را دریک لولهٔ شیشه‌ای باریک بریزیم، در این‌صورت، ارتفاع آب بالا خواهد آمد و سطح آن هم از دیوارهٔ بلوری ظرف به‌خوبی دیده می‌شود. البته معلوم است که ارتفاع آبی

---

۱. بهتر است که سطل را روی یک بلندی قرار دهید تا ترشح آبی که در اثر برخورد باران با زمین به‌وجود می‌آید، درآن داخل نشود.

که در لولهٔ باریک بلوری وجود دارد، همان ارتفاعی نیست که ما احتیاج داریم، ولی به‌آسانی می‌توان یکی را از روی دیگری به‌دست آورد. فرض کنیم قطر ته لوله باریک برابر با $\frac{1}{10}$ قطر کف سطل باشد، درنتیجه سطح ته لوله $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$، یعنی $\frac{1}{100}$ سطح کف سطل خواهد بود. بنابراین ارتفاع آن در لوله صد برابر ارتفاع آب سطل خواهد شد. به‌این ترتیب، اگر آب باران در سطل ارتفاعی برابر با ۲ میلی‌متر داشته باشد، در لولهٔ شیشه‌ای ارتفاعی برابر با ۲۰۰ میلی‌متر و یا ۲۰ سانتی‌متر خواهد داشت.

می‌بینید که لزومی ندارد ظرف شیشه‌ای را خیلی باریک انتخاب کنیم، زیرا دراین‌صورت باید ارتفاعی بی‌اندازه بلند داشته باشد. به‌طور کلی کافی است ظرف شیشه‌ای را با قاعده‌ای به‌قطر $\frac{1}{5}$ سطل انتخاب کنیم که دراین‌صورت، قاعدهٔ آن $\frac{1}{25}$ سطح قاعدهٔ سطل و ارتفاع آب باران در آن، ۲۵ برابر ارتفاع آب در سطل خواهد شد: هر میلی‌متر آبی که در سطل وجود دارد در ظرف باریک به ۲۵ میلی‌متر تبدیل می‌شود، بهتر است که روی دیوارهٔ خارجی ظرف شیشه‌ای نوار کاغذی مدرجی بچسبانیم، که هر ۲۵ میلی‌متر به ۲۵ میلی‌متر آن علامت‌گذاری و با عددهای ۱ و ۲ و ۳ و غیره، مشخص شده باشد. دراین‌صورت با توجه به‌ارتفاع آب در ظرف شیشه‌ای، بدون هیچ محاسبهٔ جدیدی، ارتفاع حقیقی آب باران در سطل معلوم خواهد شد. اگر قطر قاعده سطل، ۵ برابر قطر قاعدهٔ ظرف شیشه‌ای نباشد و مثلاً ۴ برابر آن باشد، آن وقت باید دیوارهٔ ظرف شیشه‌ای را هر ۱۶ میلی‌متر به ۱۶ میلی‌متر تقسیم‌بندی کرد و ...

ولی خالی کردن آب سطل، در ظرف باریک شیشه‌ای، به‌روش

عادی خیلی مشکل است. برای رفع این اشکال، بهتر است در دیوارهٔ سطل سوراخ گرد کوچکی تعبیه کنیم و یک لوله کوچک شیشه‌ای که درهم داشته باشد، درآن قرار دهیم، از این طریق به‌راحتی می‌توان آب سطل را وارد ظرف باریک کرد.

به‌این ترتیب، شما وسیلهٔ کامل اندازه‌گیری آب باران را در اختیار خواهید داشت. این سطل و ظرفی که ما برای اندازه‌گیری باران درست می‌کنیم، نمی‌تواند به‌اندازهٔ وسایل اندازه‌گیری مدرن ایستگاه‌های هواشناسی امروزی، دقیق باشد. ولی وسیله‌ای است که، به‌اندازه کافی ساده و ارزان است و شما می‌توانید با کمک آن محاسبه‌ای راکه لازم دارید، انجام دهید و ما هم‌اکنون، همین محاسبه را آغاز می‌کنیم:

۹۷. چه قدر باران؟

بستانی را در نظر بگیرید که ۴۰ متر طول و ۲۴ متر عرض داشته باشد. باران می‌بارد و شما می‌خواهید بدانید که چه‌قدر آب روی بستان می‌ریزد. چه‌طور محاسبه می‌کنید؟

روشن است که قبل از همه باید ارتفاع آب را در باران‌سنج به‌دست آوریم. بدون دردست داشتن این ارتفاع، هیچ محاسبه‌ای ممکن نخواهد بود. فرض کنید، باران‌سنج شما، رقم ۴ میلی‌متر را برای ارتفاع باران معین کرده باشد. ببینیم اگر آب در زمین نفوذ نکند، در هرمتر مربع بستان چند سانتی‌متر مکعب آب جمع خواهد شد. هرمتر مربع، ۱۰۰ سانتی‌متر طول و ۱۰۰ سانتی‌متر عرض خواهد داشت، که روی آن به‌ارتفاع ۴ میلی‌متر یعنی ۰/۴ سانتی‌متر آب ایستاده است.

بنابراین حجم این آب چنین خواهد بود:

$$100 \times 100 \times 0/4 = 4000 \text{ (سانتی‌متر مکعب)}$$

می‌دانید، هرسانتی‌متر مکعب آب، یک گرم وزن دارد و بنابراین در هرمتر مربع بستان، ۴۰۰۰ گرم، یعنی ۴ کیلوگرم، آب باران ریخته است.

سطح تمام بستان عبارت است از:

$$40 \times 24 = 960 \text{ (متر مربع)}$$

و به‌این ترتیب مقدار آب بارانی که روی تمام بستان می‌ریزد، برابر است با:

$$4 \times 960 = 3840 \text{ (کیلوگرم)}$$

یعنی نزدیک به ۴ تن.

برای این‌که بهتر بتوان این مقدار آب را مجسم کرد، حساب می‌کنیم، مقدار آب بارانی که روی بستان ریخته است، برابر با چند سطل آب می‌شود. یک سطل معمولی حدود ۱۲ کیلوگرم آب می‌گیرد. بنابراین تعداد سطل‌های آب از تقسیم زیر به‌دست می‌آید:

$$3840 : 12 = 320$$

به‌این ترتیب در فاصله‌ای نزدیک به‌یک ربع ساعت، بستان ما با بیش از ۳۰۰ سطل آب باران، آبیاری شده است.

حالا ببینیم باران‌های تند و ملایم را به‌چه ترتیب با زبان عدد بیان می‌کنند؟

دراین مورد مقدار آب، یا بهتر بگوییم ارتفاع باران را در مدت یک دقیقه، معین می‌کنند و آن را معمولاً «شدت نزول باران» می‌نامند. اگر به‌طور متوسط، در هردقیقه، ۲ میلی‌متر باران ببارد، درحقیقت یک

رگبار خیلی شدید است و وقتی که باران نرم و ملایم پاییزی می‌بارد، در عرض یک ساعت و یا حتا مدت بیشتری، تنها یکی دو میلی‌متر آب باران جمع می‌شود.

می‌بینید که اندازه گرفتن مقدار آبی که در اثر باران به‌سطح زمین می‌رسد، نه‌تنها ممکن است، بلکه چندان مشکل هم نیست. و حتا اگر مایل باشید می‌توانید به‌تقریب، تعداد قطره‌های باران را هم محاسبه کنید[1]. در حقیقت برای باران معمولی، در هرگرم آب باران به‌طور متوسط، ۱۲ قطره وجود دارد و به‌این ترتیب تعداد قطره‌های بارانی که درهر متر مربع بستان سابق‌الذکر ریخته است، چنین می‌شود:

$$۴۰۰۰ \times ۱۲ = ۴۸۰۰۰ \text{ (قطره)}$$

روشن است که به‌همین سادگی می‌توان تعداد قطره‌های بارانی را که روی تمام بستان ریخته است، محاسبه کرد. ولی محاسبهٔ تعداد قطره‌های باران، تنها از نظر کنجکاوی می‌تواند جالب باشد و مورد استفادهٔ عملی ندارد. ما این روش محاسبه را تنها به‌این دلیل ذکر کردیم، که نشان دهیم محاسبه‌ای که در بدو امر باورنکردنی به‌نظر می‌رسد، اگر از راه عملی وارد شویم، می‌تواند به‌آسانی انجام شود.

۹۸. چه‌قدر برف؟

ما دیگر می‌توانیم مقدار آبی را که در اثر باران فرو می‌ریزد، محاسبه کنیم. حالا ببینیم تگرگی که می‌بارد چه‌قدر آب با خود

---

۱. باران همیشه به‌صورت قطره‌های جدا از هم می‌بارد. حتا وقتی که در باران‌های شدید و رگبارها، گمان می‌کنیم که به‌صورت رشته متصل به‌زمین می‌رسد، در حقیقت به‌صورت قطره‌های متوالی است.

می‌آورد؟ روش کار درست به‌همان ترتیب سابق است. دانه‌های تگرگ در باران‌سنج شما می‌ریزد و درآن‌جا آب می‌شود و شما ارتفاع آب تگرگ را اندازه می‌گیرید.

آبی را که در اثر ریزش برف به‌دست می‌آید، به‌روش دیگری اندازه می‌گیرند. زیرا برف دراثر وزش باد داخل سطل می‌ریزد و بنابراین باران‌سنج اندازهٔ دقیق را معین نمی‌کند. برای محاسبهٔ مقدار آبی که از ریزش برف به‌دست می‌آید، می‌توان از باران‌سنج صرف نظر کرد و به‌طور مستقیم، ارتفاع برفی را که روی حیاط بستان، و یا صحرا نشسته است، باکمک یک تختهٔ چوبی اندازه گرفت و سپس با تجربه، ارتفاع آبی را که از ذوب‌شدن برف به‌دست می‌آید، محاسبه کرد: به‌این ترتیب که سطل را با برف پوک و فشرده نشده پر می‌کنیم و می‌گذاریم تا برف کاملاً آب شود. آن وقت ارتفاع آب را اندازه می‌گیریم. درنتیجه شما می‌توانید ببینید که از هرسانتی‌متر برف، چند میلی‌متر آب به‌دست می‌آید و باکمک آن مقدار آبی را که از ریزش برف حاصل شده است، محاسبه کنید. به‌این ترتیب اگر شما بدون وقفه و بدون فراموشی، مقدار آبی را که درجریان سال در اثر باران به‌زمین می‌رسد، حساب کنید و مقدار آب برف‌هایی را که باریده به‌آن اضافه کنید، خواهید دانست که در محل شما، در جریان سال چه‌قدر آب به‌زمین فرود آمده است. توجه به‌این مطلب مهم است که باید مقدار تمام نزولات آسمانی[1] را اندازه گرفت. در جدول زیر ارتفاع متوسط سالیانهٔ آبی که در اثر باران، برف و سایر نزولات در بعضی از شهرهای کشور شوروی به‌دست می‌آید، ذکر شده است:

۱. منظور از نزولات آسمانی، اعم از باران، برف، تگرگ و غیره است.

لنین گراد	۴۷ سانتی‌متر	اشترخان	۱۴ سانتی‌متر
آرخانگلسک	۴۱ سانتی‌متر	باکو	۲۴ سانتی‌متر
مسکو	۵۵ سانتی‌متر	سوردلوسک	۳۶ سانتی‌متر
قازان	۴۴ سانتی‌متر	نوبوسک	۴۳ سانتی‌متر
کوبیشف	۳۹ سانتی‌متر	آلما آتا	۵۱ سانتی‌متر
چکالف	۴۳ سانتی‌متر	تاشکند	۳۱ سانتی‌متر
ادسا	۴۰ سانتی‌متر	ایرکوسک	۴۴ سانتی‌متر
کوتاایسی	۱۷۹ سانتی‌متر	کاستروما	۴۹ سانتی‌متر

از جاهایی که دراین جدول ذکر شده است، بیش از همه، درکوتاایسی (۱۷۹ سانتی‌متر)، و کم‌تر از همه در اشترخان ۱۴ سانتی‌متر (۱۳ مرتبه کم‌تر از کوتاایسی)، آب به‌زمین می‌رسد. ولی روی کرهٔ زمین، نقطه‌هایی وجود دارد که درآن‌جا ارتفاع آب ناشی از نزولات آسمانی، خیلی بیش‌تر ازکوتاایسی است. مثلاً در هندوستان، نقطه‌ای وجود دارد، که به‌اصطلاح، همیشه پوشیده از آب باران است. درآن جا، در سال، ۱۲۶۰ سانتی‌متر، یعنی بیش از$12\frac{1}{2}$ متر باران می‌بارد. گاهی اتفاق می‌افتد که دریک شبانه‌روز بیش از ۱۰۰ سانتی‌متر، آب جمع می‌شود. برعکس، نقطه‌هایی هم وجود دارد که درآن‌جا، خیلی کم‌تر از اشترخان آب جمع می‌شود. مثلاً در آمریکای جنوبی، در شیلی، جایی است که در عرض سال حتا یک سانتی‌متر آب هم از آسمان به‌زمین نمی‌رسد.

جاهایی که ارتفاع آب نزولات آسمانی در آن‌ها کم‌تر از ۲۵ سانتی‌متر در سال باشد، نواحی خشک محسوب می‌شوند و در چنین

منطقه‌هایی جز با آبیاری مصنوعی نمی‌توان محصول و بخصوص غلات را به‌دست آورد. شما که ساکن هیچ‌یک از شهرهای نام‌برده در جدول فوق نیستید، می‌توانید خودتان ارتفاع آب نزولات آسمانی را در محل خود اندازه بگیرید. با حوصله و به‌کمک باران‌سنجی که خود درست می‌کنید، ارتفاع آب باران و تگرگ را در عرض سال اندازه بگیرید و مقدار آبی را که در اثر ذوب‌شدن برف به‌دست می‌آید، به‌آن اضافه کنید و ببینید جایی که شما هستید دربین سایر نقطه‌ها، چه نوع منطقه‌ای است: آیا جزو منطقه‌های خشک است یا منطقه‌های بارانی؟

روشن است که اگر میزان آبی که در سال در نقطه‌های مختلف کرهٔ زمین فرو می‌ریزد، در دست باشد، می‌توان به‌آسانی حساب کرد که‌به‌طور متوسط، در هرسال چند سانتی‌متر آب، روی تمام زمین می‌بارد. درخشکی، به‌طور متوسط نزدیک به ۷۸ سانتی‌متر نزولات آسمانی درسال داریم. مقدارآبی راهم که در روی اقیانوس‌ها می‌ریزد، به‌همین اندازه به‌حساب می‌آورند. بنابراین، به‌سادگی می‌توان مقدار ریزش برف و باران و غیره را، در هرسال، در روی سیارهٔ زمین، حساب کرد. برای این محاسبه باید سطح تمام زمین را بدانیم. اگر شما اندازه سطح زمین را نمی‌دانید، می‌توانید به‌روش زیر محاسبه کنید.

بی‌تردید اطلاع دارید که یک متر، تقریباً یک چهل ملیونیم محیط کرهٔ زمین است. به‌عبارت دیگر، محیط کرهٔ زمین، برابر با ۴۰۰۰۰۰۰۰ متر یا ۴۰۰۰۰ کیلومتر می‌باشد. از طرف دیگر، قطر هر دایره، $۳\frac{۱}{۷}$ مرتبه از محیط آن کوچک‌تر است و با در دست داشتن محیط کرهٔ زمین، می‌توان قطر آن را به‌دست آورد:

$$۴۰۰۰۰ : ۳\frac{۱}{۷} = ۱۲۷۰۰ \text{km}$$

سطح هرکره، برابر است با مجذور قطر آن، ضرب در $۳\frac{۱}{۷}$، یعنی:

$$۱۲۷۰۰ \times ۱۲۷۰۰ \times ۳\frac{۱}{۷} = ۵۰۹۰۰۰۰۰۰ \text{ (کیلومتر مربع)}$$

(از آن‌جا که اهمیت اصلی این عدد در سه رقم اول آن است، رقم‌های بعدی آن را صفر نوشته‌ایم).

به‌این ترتیب، تمام کرهٔ زمین برابر با ۵۰۹ میلیون کیلومتر مربع می‌باشد.

حالا به‌مسألهٔ خودمان برگردیم. ببینیم در هرکیلومتر مربع سطح زمین، چه‌قدر آب می‌ریزد. هرمتر مربع برابر با ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع است و بنابراین:

$$۷۸ \times ۱۰۰۰۰ = ۷۸۰۰۰۰ \text{ (سانتی‌متر مکعب)}$$

هرکیلو متر مربع برابر با ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰ یعنی ۱۰۰۰۰۰۰ متر مربع است. بنابراین مقدار آبی که در هرکیلومتر مربع می‌ریزد برابر است با: ۷۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب و با ۷۸۰۰۰۰ متر مکعب و آبی که روی تمام سطح زمین فرو می‌ریزد، چنین است:

$$۷۸۰۰۰۰ \times ۵۰۹۰۰۰۰۰۰ = ۳۹۷۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \text{ (متر مکعب)}$$

اگر بخواهیم عددی را که برحسب متر مکعب است به‌کیلومتر مکعب تبدیل کنیم، باید آن را بر ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰، یعنی یک میلیارد، تقسیم کنیم. دراین‌صورت به‌عدد ۳۹۷۰۰۰ کیلومتر مکعب می‌رسیم.

با این حساب درهر سال، نزدیک به ۴۰۰۰۰۰ کیلومتر مکعب، آب روی سیارهٔ ما فرو می‌ریزد.

۱۱

سی مسألهٔ مختلف

امید است که این کتاب توانسته باشد، برای خواننده‌اش مفید واقع شود و نه‌تنها او را سرگرم کرده باشد، بلکه سبب پیشرفتی در زمینهٔ درک مطلب‌های ریاضی و حضور ذهن لازم، برای او شده باشد. و نیز، میزان آگاهی‌ های او را سنجیده باشد.

احتمالاً، خوانندهٔ عزیزکتاب بخواهد، درضمن، تیزهوشی خود را نیز آزمایش کند. برای این منظور، دراین فصل سی مسألهٔ مختلف گرد آورده‌ایم و با طرح و حل آن‌ها، کتاب خود را به‌پایان می‌رسانیم.

۹۹. زنجیر

برای یک آهنگر، ۵ قطعه زنجیر آوردند که هرکدام از آن‌ها سه حلقه زنجیر داشت. و سفارش کردند که آن‌ها را به‌هم وصل کند.

قبل از آنکه آهنگر به‌کار مشغول شود، پیش خود فکر کرد، برای انجام این عمل، چند حلقه را باید باز کند و دوباره ببندد و دید که

شکل ۱۲۲. پنج قطعه زنجیر

باید چهار حلقه را، ابتدا باز کند و سپس دوباره ببندد. آیا نمی‌شود با بازکردن و بستن تعداد کم‌تری از حلقه‌ها، کار را انجام داد؟

۱۰۰. عنکبوت و خزوک (جُعَل)

دانش‌آموزی در یک گردش علمی، روی هم ۸ عنکبوت و خزوک گرفت و داخل یک قوطی کرد. اگر روی هم، در قوطی دانش‌آموز، ۵۴ پا وجود داشته باشد، چند عنکبوت و چند خزوک شکار کرده است؟

این مسأله را بدون تشکیل معادله حل کنید.

۱۰۱. بارانی، کلاه و کفش

کسی که یک بارانی، یک کلاه و یک جفت کفش خریده بود، بابت همه ۲۸۰۰ ریال پرداخت. بارانی ۱۸۰۰ ریال بیش از کلاه ارزش داشت درضمن، بارانی و کلاه، روی هم ۲۴۰۰ ریال بیش از کفش قیمت داشتند، قیمت هریک از آن‌ها، چه‌قدر بوده است؟

مسأله را باید با محاسبهٔ شفاهی و بدون تشکیل معادله حل کرد.

۱۰۲. تخم‌مرغ و تخم اردک

در شکل ۱۲۳، در بعضی از سبدها تخم‌مرغ و در بعضی دیگر، تخم اردک گذاشته شده است. تعدادی که درهریک از آن‌ها هست، روی هر سبد نوشته شده است.

فروشنده پیش خود فکر می‌کند: اگر من این سبد را به‌شما بفروشم، برایم تخم‌مرغ درست دو برابر تخم اردک باقی می‌ماند. منظور فروشنده کدام سبد است؟

شکل ۱۲۳. فروشنده کدام سبد را می‌خواهد بفروشد؟

۱۰۳. پرواز

هواپیما فاصلهٔ شهر A تا شهر B را، دریک ساعت و بیست دقیقه می‌پیماید. ولی پرواز برعکس را در هشتاد دقیقه به‌انجام می‌رساند. این مطلب به‌چه ترتیب قابل توضیح است؟

۱۰۴. هدیه‌های نقدی

دو پدر، به‌پسرهای خود مقداری پول بخشیدند. یکی از آن‌ها ۱۵۰ ریال به‌پسرش داد و دیگری ۱۰۰ ریال. ولی به‌سرمایهٔ هردو پسر روی هم رفته، فقط ۱۵۰ ریال اضافه شد. موضوع را توضیح دهید.

۱۰۵. مهره‌های شطرنج

دو مهرهٔ شطرنج را می خواهیم در دو خانهٔ شطرنج قرار دهیم، چند

وضع مختلف نسبت به‌هم می‌توانند داشته باشند؟

۱۰۶. با دو رقم

کوچک‌ترین عدد مثبت و درستی که می‌توان به‌وسیلهٔ دو عدد یک رقمی نوشت کدام است؟

۱۰۷. واحد

عدد واحد را به‌عنوان نتیجه‌ای از تمام ۱۰ رقم به‌دست بیاورید.

۱۰۸. پنج رقم برابر با ۹

عدد ۱۰ را با کمک پنج عدد برابر با ۹، به‌دست آورید. لااقل دو نمونه ذکر کنید.

۱۰۹. با ده رقم

عدد ۱۰۰ را با کمک ۱۰ رقم، از صفر تا ۹ به‌دست آورید. چند نمونه می‌توانید دراین مورد ذکر کنید؟ دراین‌مورد دست‌کم چهار روش وجود دارد.

۱۱۰. با چهار روش

با چهار روش عدد ۱۰۰ را با کمک ۵ رقم برابر، به‌دست بیاورید.

۱۱۱. با چهار رقم برابر واحد

بزرگ‌ترین عددی را که با چهار رقم برابر «یک» می‌توان به‌دست

آورد، کدام است؟

۱۱۲. چیستان تقسیم

در تقسیم زیر، تمام رقم‌ها به‌وسیلهٔ ستاره مشخص شده‌اند، جز چهار رقم که هرچهار رقم عدد ۴ هستند و جای آن‌ها هم‌معین شده است. رقم‌هایی را که باید به‌جای ستاره‌ها گذاشت را، معین کنید:

```
******۴ | ***
***     |-----
------- | *۴**
 **۴*
 ****
-------
  ****
   *۴*
-------
   ****
   ****
-------
```

این مسأله چند جواب مختلف دارد؟

۱۱۳. باز هم یک تقسیم دیگر

در تقسیم زیر هم، جای ستاره‌ها را پر کنید:

```
**۷******* | ****۷*
******     |--------
---------- | **۷**
*****۷*
*******
----------
  *۷****
  *۷****
----------
  *******
  ****۷**
----------
     ******
     ******
----------
```

۱۱۴. چه‌قدر خواهد شد؟

اگر مربعی به‌ضلع یک متر را به‌مربع‌هایی به‌ضلع یک میلی‌متر تبدیل کنیم و این مربع‌های کوچک را دنبال هم بگذاریم، طول نواری که به‌دست می‌آید، چه‌قدر خواهد بود؟ جواب را به‌طور ذهنی به‌دست آورید.

۱۱۵. با همان روش

اگر مکعب‌های به‌ضلع یک میلی‌متر را، که از یک مکعب به‌ضلع یک متر جدا شده‌اند، روی هم بچینیم، ستونی به‌ارتفاع چند کیلومتر خواهد شد؟

۱۱۶. هواپیما

از یک هواپیما به‌پهنای ۱۲ متر در حال فرودآمدن، عکس گرفته‌ایم. هواپیما عمود بردوربین عکاسی است و عمق دوربین هم ۱۲ سانتی‌متر است. اگر پهنای هواپیما در عکس برابر با ۸ میلی‌متر باشد، ارتفاع هواپیما را در لحظهٔ عکس گرفتن پیدا کنید.

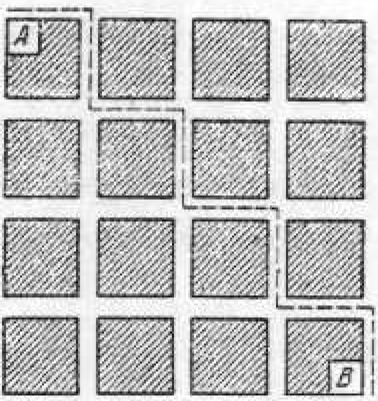
۱۱۷. یک ملیون شیء

اگر وزن یک جسم ۸۹/۴ گرم باشد، به‌طور ذهنی حساب کنید، یک ملیون از این جسم، چه‌قدر وزن خواهد داشت؟

۱۱۸. چند راه؟

در شکل ۱۲۴ می‌بینید که قطعه زمینی به‌ناحیه‌های مربع‌شکل

تقسیم شده است. راهی به‌وسیلهٔ خط‌چین از A به B مشخص شده است و البته این تنها راهی نیست که برای عبور از A به B وجود دارد، شما حساب کنید، چند راه با طول برابر، بین این دو نقطه می‌توان پیدا کرد؟



شکل ۱۲۴. قطعه زمینی به‌ناحیه‌های جداگانه تقسیم شده است.

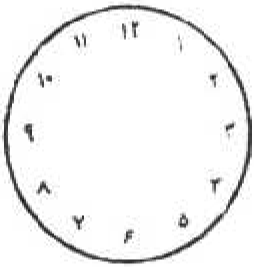
۱۱۹. صفحهٔ ساعت

صفحهٔ ساعت شکل ۱۲۵ را می‌خواهیم به ۶ قسمت تقسیم کنیم. لازم نیست قسمت‌ها با هم برابر باشند، ولی در عوض می‌خواهیم مجموع عددهایی که در هرقسمت قرار می‌گیرد، مقدار ثابتی باشد.

حل این مسأله بیشتر مربوط به‌سرعت تصور ذهنی شما است نه تیزهوشی و حاضرجوابی.

۱۲۰. ستاره هشت‌پر

می‌خواهیم عددهای از ۱ تا ۱۶ را درهریک از نقطه‌های تلاقی

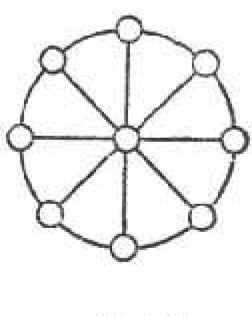


شکل ۱۲۵. می‌خواهیم این صفحه ساعت را به ۶ قسمت تقسیم کنیم.

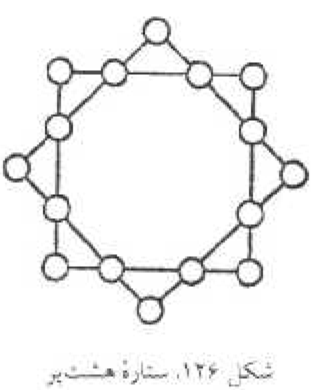
ضلع‌های شکل ۱۲۶ قرار دهیم، طوری که مجموع عددهای چهاررأس هر مربع برابر با ۳۴ شود.

۱۲۱. چرخ عددی

عددهای از ۱ تا ۹ را بین خانه‌های شکل ۱۲۷ طوری تقسیم کنید که یک عدد در مرکز دایره قرار گیرد و هشت عدد دیگر، روی محیط دایره و مجموع عددهای هرقطر، برابر با ۱۵ شود.



شکل ۱۲۷. چرخ عددی



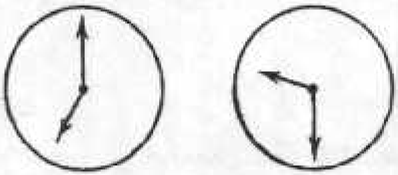
شکل ۱۲۶. ستارهٔ هشت‌پر

۱۲۲. میز سه‌پایه

عقیده عمومی براین است که اگر میزی دارای سه پایه باشد، هرگز تکان نمی‌خورد. حتی اگر پایه‌های آن با هم برابر نباشند. آیا این عقیده درست است؟

۱۲۳. اندازهٔ زاویه‌ها

زاویه‌های بین عقربه‌های ساعت در شکل ۱۲۸ را معین کنید. جواب را به‌طور ذهنی محاسبه کنید، نه به کمک نقاله.



شکل ۱۲۸. اندازه زاویه‌های بین عقربه‌ها چه‌قدر است؟

۱۲۴. در استوا

اگر کرهٔ زمین را کرهٔ کاملی به‌قطر دایرهٔ استوا فرض کنیم، ضمن حرکت وضعی زمین، نوک سر و کف پای ما، دو دایرهٔ مختلف رسم می‌کنند. اختلاف محیط این دو دایره چه‌قدر است؟

۱۲۵. در شش ردیف

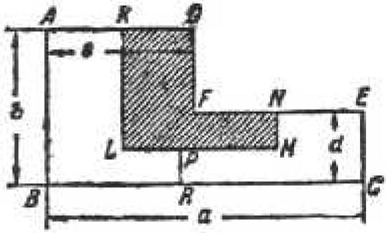
شاید این داستان شوخی را شنیده باشید، که ۹ اسب را در ۱۰ آخور جا دادند، به‌طوری که در هرآخور، یک اسب وجود داشت. مسأله‌ای که دراین‌جا طرح می‌کنیم، بی‌شباهت به‌این افسانه نیست.

ولی، مثل آن خیالی نیست و جواب واقعی دارد.

۲۴ نفر را در ۶ ردیف چنان قرار دهید، که در هرردیف ۵ نفر قرار بگیرد.

۱۲۶. چگونه تقسیم کنیم؟

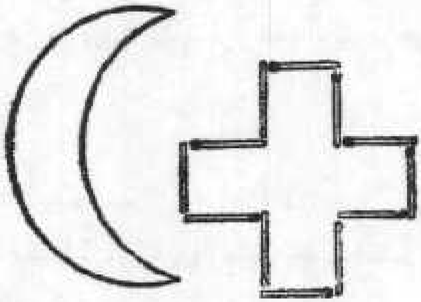
اگر از یک مستطیل، یک چهارم آن را حذف کنیم، شبیه شکل ۱۲۹ به‌دست می‌آید. تقسیم چنین شکلی، به‌چهار قسمت، به‌طوری که این قسمت‌ها با هم برابر باشند و متشابه با شکل اصلی، مشکل نیست. در شکل کوشش کرده‌ایم که آن را به‌سه قسمت برابر تقسیم کنیم. آیا چنین تقسیمی ممکن است؟



شکل ۱۲۹. چگونه می‌توان این شکل را به‌سه قسمت برابر، تقسیم کرد؟

۱۲۷. صلیب و هلال ماه

در شکل ۱۳۰، یک هلال ماه داده شده که از دو کمان دایره تشکیل شده است. می خواهیم علامت صلیب سرخ را چنان بسازیم که سطح آن درست برابر با سطح هلال ماه باشد.



شکل ۱۳۵. چگونه می‌توان هلال ماه را به‌صلیب تبدیل کرد؟

۱۲۸. مسألهٔ بندیکتوف

بسیاری از کسانی که به‌ادبیات روسیه علاقه‌مندند، می‌دانند که و. گ. بندیکتوف شاعر را می‌توان بدون تردید نخستین مؤلف چیستان‌های ریاضی در زبان روسی دانست. رساله‌ای که بندیکتوف، دراین‌باره نوشته، چاپ نشده است و فقط نسخهٔ خطی آن در سال ۱۹۲۴ کشف شده است. من توانستم به‌این رسالهٔ خطی دسترسی پیدا کنم. حتا یکی از چیستان‌های مربوط به‌سال تنظیم رساله را حل کردم: ۱۸۶۹ (در خود رساله ذکری از سال نشده است). مسأله‌ای که در زیر طرح می‌شود، به‌وسیلهٔ همین شاعر، به‌شکل ادبی تنظیم شده و من از رسالهٔ او اقتباس کرده‌ام. عنوان این مسأله چنین است: «حیله‌ای برای حل یک مسألهٔ دشوار»:

«مادری که کارش خرید و فروش تخم‌مرغ بود، برای فروش، ۹ جعبهٔ ۱۰ تایی تخم‌مرغ داشت. سه دخترش را به‌بازار فرستاد و به‌دختر بزرگ‌تر، که از همه فهمیده‌تر بود، ۱۰ تخم‌مرغ سپرد.

به‌دیگری ۳ جعبهٔ ۱۰ تایی و به‌سومی، ۵۰ تخم‌مرغ. درضمن، به‌دخترهایش گفت:

«در مورد قیمتی که شما می‌فروشید، بین خودمان قراری می‌گذاریم و از این قرار کسی نباید تخطی کند. هریک از شما باید تخم‌مرغ‌هایتان را به‌قیمتی بفروشید که دیگری فروخته است، ولی انتظار من این است که با وجود این، پولی که دختر بزرگ من بابت ۱۰ تخم‌مرغ خود می‌آورد، همان‌قدر باشد که دختر دوم من، بابت ۳۰ تخم‌مرغ خود می‌آورد. به‌همین ترتیب، پول فروش ۳۰ تخم‌مرغ دختر دوم، باید با پول فروش ۵۰ تخم‌مرغ دختر کوچک‌تر من یکی باشد. بنابراین، پولی که از فروش تخم‌مرغ‌های هریک از سه نفر عاید می‌شود، برابر خواهد بود. درضمن می‌خواهم، هر ۱۰ تخم‌مرغ، از ۱۰ کوپک و کل آن ۹۰ تخم‌مرغ، از ۹۰ کوپک و یا ۳۰ آلتین، کم‌تر نشود (هر آلتین برابر با ۳ کوپک می‌باشد).» داستان سندیکنوف را همین‌جا قطع می‌کنیم و از خواننده می‌خواهیم، توضیح دهد، دخترها چگونه مأموریت خود را انجام دادند.

حل چیستان‌های از ۹۹ تا ۱۲۸

۹۹. می‌توان برای وصل قطعه زنجیرها، تنها سه حلقه را بازکرد. برای این منظور، باید سه حلقهٔ یکی از قطعه زنجیرها را از هم جدا کرد و چهار قطعهٔ دیگر را به‌وسیلهٔ آن‌ها به‌هم وصل نمود.

۱۰۰. برای حل این مسأله، قبل از همه باید بدانیم که عنکبوت و

خزوک هرکدام چند پا دارند: عنکبوت ۸ پا و خزوک ۶ پا.

اگر داخل قوطی فقط خزوک باشد، چون تعداد آن‌ها ۸ می‌باشد، مجموع پاهایی که دراین‌صورت در قوطی خواهد بود، برابر با ۸ × ۶، یعنی ۴۸ می‌شود و طبق فرض مسأله، ۶ پا کسر می‌آید. اگر به‌جای یکی از خزوک‌ها یک عنکبوت در نظر بگیریم، تعداد پاها ۲ عدد اضافه می‌شود، زیرا عنکبوت به‌جای ۶ دارای ۸ پا است.

بنابراین، روشن است که اگر به‌جای ۳ خزوک، عنکبوت در نظر بگیریم، کسری ۶ پا تأمین می‌شود. آن وقت در قوطی درست ۵۴ پا وجود خواهد داشت. ولی دراین‌صورت تعداد خزوک‌ها ۵ و تعداد عنکبوت‌ها، ۳ خواهد بود.

امتحان کنیم: ۵ خزوک دارای ۳۰ پا و ۳ عنکبوت دارای ۲۴ پا هستند و در نتیجه روی هم ۵۴ = ۲۴ + ۳۰ پا، در قوطی خواهیم داشت.

برای حل این مسأله، می‌توانستیم از عنکبوت شروع کنیم و ابتدا فرض کنیم که، هر ۸ جانور، عنکبوت باشند. دراین‌صورت ۶۴ = ۸ × ۸ پا به‌دست می‌آید که به‌اندازهٔ ۱۰ پا از تعداد مورد نظر بیشتر است. اکنون با توجه به‌این که با تعویض هرعنکبوت به‌وسیلهٔ خزوک ۲ عدد از تعداد پاها کم می‌شود، ناچاریم ۵ مرتبه تعویض را انجام دهیم تا تعداد کل پاها برابر با ۵۴ بشود. یعنی از عنکبوت، تنها ۳ تا باقی می‌ماند و بقیه جای خود را به‌خزوک می‌دهند.

۱۰۱. اگر به‌جای بارانی، کلاه و کفش، فقط دو جفت کفش می‌خریدیم، طبق فرض مسأله باید ۲۴۰۰ ریال کم‌تر بپردازیم. یعنی قیمت دو جفت کفش برابر با ۲۴۰۰ - ۲۸۰۰، یعنی ۴۰۰ ریال، و

قیمت هر جفت آن ۲۰۰ ریال می‌شود. حالا روشن است که بارانی و کلاه، روی هم ۲۰۰ ـ ۲۸۰۰، یعنی ۲۶۰۰ ریال قیمت دارد و چون بارانی ۱۸۰۰ ریال گران‌تر از کلاه است، مثل قسمت اول فرض می‌کنیم فقط دو کلاه خریده باشیم، که باید ۱۸۰۰ ـ ۲۶۰۰، یعنی ۸۰۰ ریال، بپردازیم و درنتیجه، قیمت یک کلاه، ۴۰۰ ریال می‌شود.

بقیهٔ پول، یعنی ۲۰۰ ریال هم به‌خاطر بارانی پرداخت شده است.

۱۰۲. منظور فروشنده سبدی است که روی آن عدد ۲۹ نوشته شده است. تخم‌مرغ‌ها در سبدهایی است که روی آن‌ها عددهای ۲۳ و ۱۲ و ۵ نوشته شده و تخم اردک‌ها، در دو سبد دیگر که روی آن‌ها عددهای ۱۴ و ۶ قرار دارد.

زیرا دراین صورت داریم:

۴۰ = ۵ + ۱۲ + ۲۳: تعداد تخم‌مرغ‌های باقی‌مانده

۲۰ = ۶ + ۱۴: تعداد تخم اردک‌های باقی‌مانده

و همان‌طور که می‌بینیم تعداد تخم‌مرغ‌ها دو برابر تخم اردک‌ها خواهد شد.

۱۰۳. دراین مسأله هیچ مطلب مورد اشکالی وجود ندارد، مدت پرواز هواپیما، در رفت و برگشت یکی است. زیرا هشتاد دقیقه همان یک ساعت و بیست دقیقه است.

این مسأله به‌این مناسبت طرح شده است که عدم دقت خواننده سنجیده شود، زیرا ممکن است فکر کند که یک ساعت و بیست دقیقه، با هشتاد دقیقه فرق دارد. از آن‌جا که ما عادت به‌دستگاه متری کرده‌ایم و اندازه‌گیری زمان با دستگاه غیرمتری است، این اشتباه پیدا می‌شود. وقتی که می‌خواهیم «یک ساعت و بیست دقیقه» را با

«هشتاد دقیقه» مقایسه کنیم، در لحظهٔ اول، ذهن متوجه مقایسه عددهایی از قبیل «۱ تومان و ۲۰ ریال» با «۸۰ ریال» می‌شود و به‌همین مناسبت اشتباه می‌کند.

۱۰۴. درحقیقت یکی از پدرها، پسر دیگری بوده است. یعنی روی هم‌رفته، ۳ نفر بوده‌اند، نه چهار نفر: پدربزرگ، پسر و نوه. پدربزرگ ۱۵۰ ریال به‌پسرش می‌دهد و او ۱۰۰ ریال به‌پسر خودش می‌دهد (یعنی نوهٔ پدربزرگ) و درنتیجه برای خودش تنها ۵۰ ریال باقی می‌ماند.

۱۰۵. مهرهٔ اول را می‌توانیم درهریک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج قرار دهیم. یعنی ۶۴ حالت برای مهرهٔ اول وجود دارد. ولی وقتی، مهرهٔ اول دریکی از خانه‌ها قرار دارد، مهرهٔ دوم را می‌توانیم، دریکی از ۶۳ خانهٔ بقیه بگذاریم.

یعنی برای هریک از ۶۴ حالت مهرهٔ اول، ۶۳ حالت برای مهرهٔ دوم، وجود دارد. درنتیجه، کل حالت‌های ممکن چنین خواهد بود:

$$۶۴ \times ۶۳ = ۴۰۳۲$$

۱۰۶. آن‌طورکه ممکن است بعضی از خوانندگان گمان کنند، کوچک‌ترین عددی که می‌توان با دو عدد یک رقمی نوشت، ۱۰ نیست، بلکه واحد است. به‌صورت زیر:

$$\frac{۱}{۱}\ و\ \frac{۲}{۲}\ و\ \frac{۳}{۳}\ و\ \frac{۴}{۴}\ و\ ...\ تا\ \frac{۹}{۹}$$

برای کسانی که با مقدمات جبر آشنا باشند، می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت:

$$۱^{۰}\ و\ ۲^{۰}\ و\ ۳^{۰}\ و\ ...\ تا\ ۹^{۰}$$

زیرا هر عدد به‌توان صفر برابر است با واحد[۱].

۱۰۷. عدد یک را می‌توان به‌صورت مجموع دو کسر زیر نوشت:

$$۱ = \frac{۳۵}{۷۰} + \frac{۱۴۸}{۲۹۶}$$

و کسانی که به‌مقدمات جبر آشنا باشند، می‌توانند به‌صورت‌های زیر هم بنویسند:

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹^{۰};\ ۲۳۴۵۶۷^{۹-۸-۱} \ldots$$

زیرا حاصل هر عدد به‌توان صفر، برابر با واحد است.

۱۰۸. داریم:

$$۱۰ = ۹\frac{۹۹}{۹۹} \quad \text{و}$$

$$۱۰ = \frac{۹۹}{۹} - \frac{۹}{۹}$$

و کسانی که به‌جبر آشنا باشند، می‌توانند جواب‌های دیگری هم پیدا کنند، از قبیل:

$$۱۰ = (۹\frac{۹}{۹})^{\frac{۹}{۹}} \quad \text{و}$$

$$۱۰ = ۹ + ۹۹^{۹-۹}$$

۱۰۹. چهار جواب در زیر داده شده است:

$$۱۰۰ = ۷۰ + ۲۴\frac{۹}{۱۸} + ۵\frac{۳}{۶} \quad \text{و}$$

$$۱۰۰ = ۸۰\frac{۲۷}{۵۴} + ۱۹\frac{۳}{۶} \quad \text{و}$$

$$۱۰۰ = ۸۷ + ۹\frac{۴}{۵} + ۳\frac{۱۲}{۶۰} \quad \text{و}$$

---

۱. عددهای $\frac{۰}{۰}$ و $۰^{۰}$ نمی‌توانند جواب باشند. زیرا این دو عدد درحالت کلی دارای مفهوم نیستند و درحالت‌های خاص هم، همیشه برابر با یک نیستند.

$$۵۰\frac{۱}{۲} + ۴۹\frac{۳۸}{۷۶} = ۱۰۰$$

۱۱۰. عدد ۱۰۰ را می‌توان به کمک ۵ رقم برابر، با به کار بردن ۱، ۳ و ۵ به‌دست آورد:

$$۱۱۱ - ۱۱ = ۱۰۰ \text{ و}$$

$$۳۳ \times ۳ + \frac{۳}{۳} = ۱۰۰ \text{ و}$$

$$۵ \times ۵ \times ۵ - ۵ \times ۵ = ۱۰۰ \text{ و}$$

$$(۵ + ۵ + ۵ + ۵) \times ۵ = ۱۰۰$$

۱۱۱. اغلب به‌عنوان جواب این مسأله، ۱۱۱۱ را به‌دست می‌آورند. ولی می‌توان عددی به‌مراتب بزرگ‌تر به‌دست آورد، به‌شرطی که آن را به‌صورت $۱۱^{۱۱}$ بنویسیم. اگر شما حوصله داشته باشید، و حاصل این عدد را به‌دست آورید (با کمک لگاریتم می‌توان به‌سرعت حاصل تقریبی آن را به‌دست آورد)، می‌بینید که بزرگ‌تر از ۲۸۰ میلیارد خواهد بود: یعنی حدود ۲۵۰ ملیون برابر ۱۱۱۱.

۱۱۲. در زیر ۴ جواب این مسأله داده شده است:

$$۱۳۳۷۱۷۴ : ۹۴۳ = ۱۴۱۸$$

$$۱۳۴۳۷۸۴ : ۹۴۹ = ۱۴۱۶$$

$$۱۲۰۰۴۷۴ : ۸۴۶ = ۴۱۱۹$$

$$۱۲۰۲۴۶۴ : ۸۴۸ = ۱۴۱۸$$

۱۱۳. در زیر تنها جواب مسأله داده شده است:

$$۷۳۷۵۴۲۸۴۱۳ : ۱۲۵۴۷۳ = ۵۸۷۸۱$$

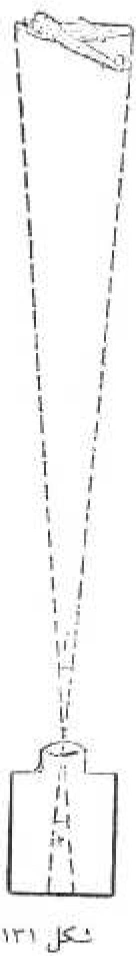
دو مسألهٔ اخیر، که ساده هم نیستند، برای نخستین بار در مجله‌های آمریکایی، «مجلهٔ ریاضیات» (سال ۱۹۲۰) و در «محیط دبیرستانی» (سال ۱۹۰۶) چاپ شده‌اند.

۱۱۴. در مربع به‌ضلع یک متر، ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰ مربع، به‌ضلع یک میلی‌متر وجود دارد. هر ۱۰۰۰ مربع به ضلع یک میلی‌متر را که دنبال هم بگذاریم، نواری به‌طول یک متر به‌دست می‌آید و بنابراین، طول نواری که از پهلوی هم گذاشتن یک ملیون مربع کوچک تشکیل می‌شود، برابر با ۱۰۰۰ متر، یعنی یک کیلومتر خواهد شد.

۱۱۵. با توجه به‌مسأله قبل روشن می‌شود که طول چنین ستونی برابر با ۱۰۰۰ کیلومتر خواهد شد.

۱۱۶. در شکل ۱۳۱ دیده می‌شود (با توجه به‌تساوی زاویه‌های ۱ و ۲)، که نسبت اندازه‌های خطی جسم، به‌اندازه‌های متناظرش در تصویر، برابر است با نسبت فاصلهٔ جسم تا دوربین، به‌عمق دوربین.

در مسألهٔ ما، اگر ارتفاع هواپیما را برحسب متر برابر با x بگیریم خواهیم داشت: $12000 : 8 = x : 0/12$ و از آن‌جا ارتفاع هواپیما ۱۸۰ متر، به‌دست می‌آید.



شکل ۱۳۱

۱۱۷. حساب ذهنی این مسأله را به‌این ترتیب انجام می‌دهیم: باید ۸۹/۴ گرم را در یک میلیون،

یعنی دوبار در هزار ضرب کنیم.

هزار برابر ۸۹/۴ گرم برابر با ۸۹/۴ کیلوگرم می‌شود. زیرا هرکیلوگرم برابر با هزار گرم است و هزار برابر ۸۹/۴ کیلوگرم، ۸۹/۴ تن می‌شود؛ هر تن برابر با هزار کیلوگرم است.

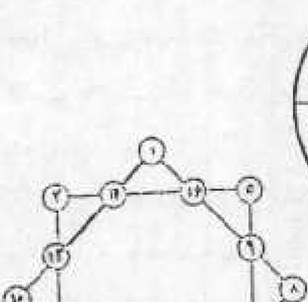
و به‌این ترتیب، وزن مورد نظر برابر با ۸۹/۴ تن خواهد بود.

۱۱۸. تعداد تمام راه‌های ممکن، که A را به B وصل می‌کند، برابر است با ۷۰ (راه حل اصولی این مسأله را می‌توان با کمک مثلث حسابی پاسکال به‌دست آورد).

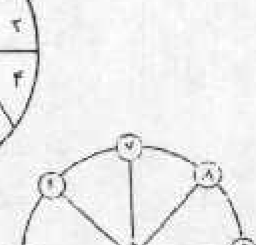
۱۱۹. از آن‌جا که مجموع تمام عددهای روی صفحهٔ ساعت برابر با ۷۸ می‌باشد، مجموع عددهای هریک از شش قسمت، باید برابر با $\frac{1}{6}$ عدد ۷۸، یعنی ۱۳ بشود. به‌این ترتیب روش تقسیم، به‌آسانی به‌دست می‌آید. (شکل ۱۳۲).

۱۲۰ و ۱۲۱. راه حل در شکل‌های ۱۳۳ و ۱۳۴ داده شده است.

شکل ۱۳۲



شکل ۱۳۳



شکل ۱۳۴

۱۲۲. میز سه پایه همیشه می‌تواند به‌خوبی روی سه پایهٔ خودش بایستد، زیرا از هر سه نقطه فضا، همیشه می‌توان یک صفحه و تنها یک صفحه عبور داد. به‌این علت است که میز سه پایه هرگز تکان نمی‌خورد. همان طور که دیده می‌شود، این مسأله کاملاً به‌هندسه مربوط است و نه به‌فیزیک.

به‌همین مناسبت است که برای پایه‌های دوربین عکاسی و سایر لوازم از این قبیل، سه پایه درست می‌کنند. درحالی که با چهار پایه درست شوند، به‌محض این که طول یکی از پایه‌ها، ولو مقدار کمی، با بقیه فرق داشته باشد، تعادل چهار پایه به‌هم می‌خورد و نمی‌تواند محکم برجای خود قرار بگیرد.

۱۲۳. وقتی می‌توان به‌سادگی جواب را به‌دست آورد، که بدانیم عقربه‌ها چه ساعتی را نشان می‌دهند.

عقربه‌های ساعت سمت چپ (در شکل ۱۲۸)، ساعت ۷ را نشان می‌دهند، یعنی کمان بین دو عقربه برابر با $\frac{۵}{۱۲}$ تمام دایره می‌باشد.

درنتیجه این کمان برحسب درجه چنین خواهد بود:

$$۳۶۰ \times \frac{۵}{۱۲} = ۱۵۰^\circ$$

عقربه‌های ساعت سمت راست (در شکل ۱۲۸)، ساعت نه و نیم را نشان می‌دهند و بنابراین، کمان بین دو عقربه، برابر با $۱۲ : ۳\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۷}{۲۴}$ محیط دایره خواهد بود که برحسب درجه چنین می‌شود:

$$۳۶۰ : \frac{۷}{۲۴} = ۱۰۵^\circ$$

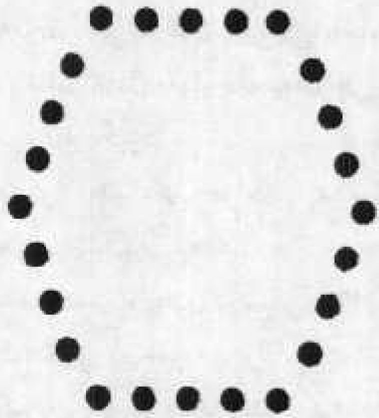
۱۲۴. اگر قد انسان را ۱۷۵ سانتی‌متر و شعاع کره زمین را R فرض کنیم، داریم:

$$۲ \times ۳/۱۴ (R + ۱۷۵) - ۲ \times ۳/۱۴ \times R =$$

$$= ۲ \times ۳/۱۴ \times ۱۷۵ = ۱۱۰۰ \text{ (سانتی‌متر)}$$

یعنی نزدیک به ۱۱ متر. عجیب این است که این اختلاف، هیچ‌گونه ارتباطی به‌شعاع کره زمین ندارد. و برای هر کره‌ای با هر شعاعی همین نتیجه به‌دست می‌آید.

۱۲۵. مسأله وقتی حل خواهد شد که افراد را به‌صورت یک شش ضلعی منتظم، مثل شکل ۱۳۵، پهلوی هم قرار دهیم.



شکل ۱۳۵

۱۲۶. موضوع جالب این مسأله دراین‌جا است که، برای هر مقدار دل‌خواه a, b, c, d دارای جواب نیست، بلکه تنها به‌ازای مقادیر معینی از این اجزاء می‌تواند حل شود. درحقیقت ما می‌خواهیم، قسمت هاشور خوردهٔ شکل ۱۲۹، برابر با هریک از قسمت‌های هاشور نخوردهٔ این شکل باشد. ضلع LM از RC کوچک‌تر است و بنابراین باید برابر با AB باشد. از طرف دیگر، همین LM باید با BC

هم برابر باشد، یعنی:

$$LM = RC = b$$

بنابراین خواهیم داشت: $BR = a - b$. ولی BR باید برابر با KL، و CE باشد، یعنی $a - b = d$ و $KL = d$

می‌بینیم که a, b, c نمی‌توانند به‌دل‌خواه انتخاب شوند و ضلع d باید برابر با اختلاف a, b باشد. ولی همین شرط هم کافی نیست. خواهیم دید که همهٔ ضلع‌ها باید مضرب‌های معینی از ضلع a باشند.

داریم: $PR + KL = AB$ یا $PR + (a - b) = b$ به‌این ترتیب b $PR = ۲b - a$ با مقایسهٔ ضلع‌های متناظر شکل هاشورخورده و شکل هاشورنخورده سمت راست، داریم: $PR = MN$، یعنی $PR = \frac{d}{۲}$ و ازآن جا خواهیم داشت: $\frac{d}{۲} = ۲b - a$ با مقایسهٔ رابطهٔ اخیر و رابطهٔ $a - b = d$ به‌دست می‌آید: $b = \frac{۳}{۵}a$ اکنون اگر شکل هاشورخورده و شکل هاشورنخورده سمت چپ را مقایسه کنیم، خواهیم داشت: $AK = MN$، یعنی:

$$AK = PR = \frac{d}{۲} = \frac{۱}{۵}a$$

به‌همین ترتیب رابطهٔ $KD = PR = \frac{۱}{۵}a$ به‌دست می‌آید که منجر به‌برابری $AD = \frac{۲}{۵}a$ می‌شود.

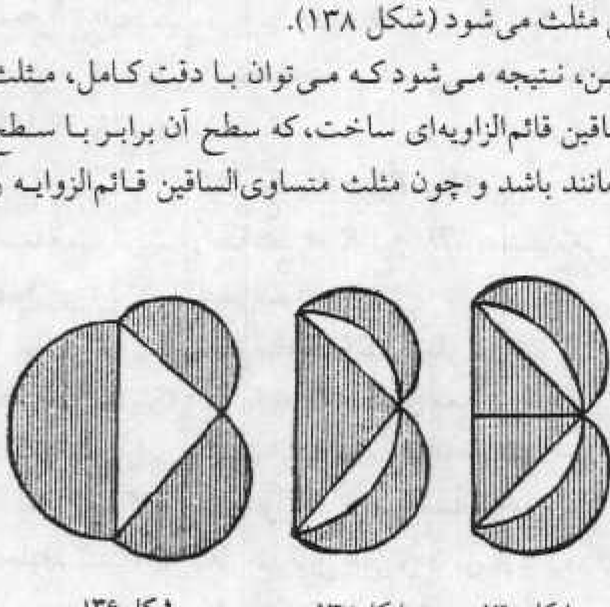
به‌این ترتیب، ضلع‌های شکل اصلی را نمی‌توان به‌دل‌خواه انتخاب کرد، بلکه آن‌ها باید مضرب‌های معینی ($\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$) از ضلع a باشند. تنها دراین صورت است که می‌توان مسأله را حل کرد.

۱۲۷. ممکن است، خوانندگان، این مسأله را با مسألهٔ تربیع دایره، مخلوط کنند و به‌خاطر غیرقابل حل بودن تربیع دایره، گمان کنند که این مسأله هم، راه حل دقیقی ندارد. ازآن جا که نمی‌توان مربعی

معادل با دایرهٔ مفروض ساخت، بسیاری خیال می‌کنند هلالی را هم که از قوس‌های دو دایره تشکیل شده است، نمی‌توان به‌شکل‌های مستقیم‌الخط تبدیل کرد.

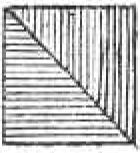
ولی بدون هیچ شکی می‌توان با استفاده از یکی از قضیه‌های مشهور و جالب فیثاغورث، راه حل هندسی برای این مسأله پیدا کرد. قضیه مورد استناد ما این است که در هرمثلث قائم‌الزاویه، مساحت نیم‌دایرهٔ به‌قطر وتر، برابر است با مجموع مساحت‌های نیم‌دایره‌های به‌قطرهای ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه (شکل ۱۳۶). اگر نیم‌دایره‌های بزرگ‌تر را در طرف دیگر رسم کنیم (شکل ۱۳۷)، می‌بینیم که مجموع دو هلال هاشورخورده معادل با مثلث می‌شود. اگر مثلث را متساوی‌الساقین درنظر بگیریم، هریک از هلال‌ها، معادل با نصف این مثلث می‌شود (شکل ۱۳۸).

بنابراین، نتیجه می‌شود که می‌توان با دقت کامل، مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای ساخت، که سطح آن برابر با سطح هلال داس‌مانند باشد و چون مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه را



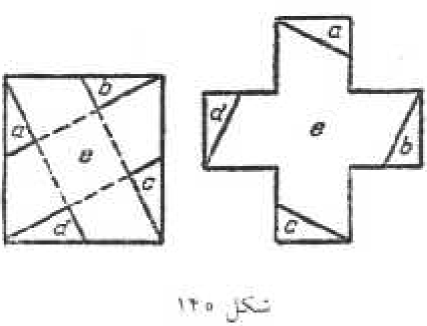
شکل ۱۳۶ شکل ۱۳۷ شکل ۱۳۸

می‌توان به‌سادگی به‌مربع معادل آن تبدیل کرد (شکل ۱۳۹)، می‌توان تربیع هلال را هم به‌دست آورد.



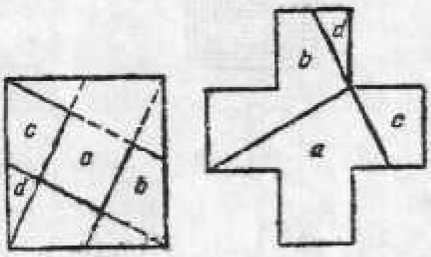
شکل ۱۳۹

اکنون باید راهی پیدا کرد که به‌کمک آن بتوانیم مربع را به‌صلیب معادلش تبدیل کنیم (که از پنج مربع برابر و متصل به‌هم تشکیل شده است). راه‌های زیادی برای این تبدیل وجود دارد که دو تا از آن‌ها در شکل‌های ۱۴۰ و ۱۴۱ داده شده است. اساس هردو راه براین است که رأس هر مربع را به‌وسط ضلع مقابلش وصل کنیم.



شکل ۱۴۰

توضیح این مطلب لازم است که ما تنها هلالی را می‌توانیم به‌صلیب معادلش تبدیل کنیم، که از دو قوس دایره تشکیل شده باشد، به‌طوری که، قوس بیرونی یک نیم‌دایره و قوس درونی، که شعاع بزرگ‌تری دارد، یک ربع دایره باشد[۱].



شکل ۱۴۱

با توضیح‌های بالا راه حل تبدیل هلال به‌صلیب چنین می‌شود: A و B، یعنی دو انتهای هلال را به‌هم وصل می‌کنیم (شکل ۱۴۲)، از نقطهٔ O یعنی وسط این پاره‌خط است، عمودی برآن اخراج کرد، را OC برابر OA جدا می‌کنیم.

به‌همین ترتیب، عمود $AD = AO$، را بر AB اخراج کرده و مربع $OADC$ را که معادل هلال است، به‌دست می‌آوریم. سپس با یکی از راه‌هایی که قبلاً ذکر کردیم، آن را به‌صلیب تبدیل می‌کنیم.

۱. هلال ماهی را که ما در آسمان می‌بینیم، شکل دیگری دارد. قوس خارجی آن یک نیم دایره است و قوس داخلی آن یک نیم بیضی. ولی نقاش‌ها اغلب به‌غلط هردو قوس را قوس‌هایی از دایره می‌کشند.

۱۲۸. اکنون به‌نقل بقیه داستان بندیکنوف می‌پردازیم:

«مسألهٔ مشکلی بود. قبل از این‌که دخترها به‌بازار بروند، نشستند تا با هم مشورت کنند. ولی درعین حال، دختران کوچک‌تر متوجه درایت و نظر دختر بزرگ‌تر بودند. دختر بزرگ‌تر گفت:

ـ خواهران، ما آن‌طور که تا حالا انجام می‌دادیم، تخم‌مرغ‌ها را ۱۰ تایی نخواهیم فروخت، بلکه ۷ تایی عرضه خواهیم کرد. قیمت هر ۷ تخم‌مرغ را هم همان‌طور که مادرمان سفارش کرده است، یک‌جور می‌گذاریم. از قیمتی که قرار می‌گذاریم، حتا یک کوپک هم پایین نیایید! برای هر ۷ تخم‌مرغ یک آلتین[1].

دختر دوم گفت:

ـ ارزان نیست؟

دختر بزرگ‌تر جواب داد:

ـ ما قیمت را برای بقیه تخم‌مرغ‌هایی که در سبدهای ما باقی می‌ماند و ۷ عدد کامل نیستند، بالا می‌بریم. من قبلاً تحقیق کرده‌ام که غیر از ما کس دیگری در بازار، تخم‌مرغ نمی‌فروشد. بنابراین هیچ‌کس نمی‌تواند قیمت را بشکند. وقتی تقاضا بالا و کالا هم رو به‌اتمام است، می‌توان قیمت را بالاتر برد و درنتیجه درآخر کار، قیمت‌ها جبران خواهد شد.

دختر کوچک پرسید:

ـ بقیه را به‌چه قیمتی خواهیم فروخت؟

ـ هرتخم‌مرغ را به ۳ آلتین. خوب دیگر بروید، آن‌چه که لازم بود، به‌شما گفتم.

---

۱. آلتین پول قدیمی روسیه، برابر با ۳ کوپک است.

دختر وسطی دوباره گفت:

ـ آخر این خیلی گران می‌شود.

و دختر بزرگ‌تر جواب داد:

ـ ما که تخم‌مرغ‌های ۷ تایی اول را ارزان می‌فروشیم، باید با پول بقیه، آن را جبران کنیم. به‌این ترتیب، هر سه دختر با هم موافقت کردند.

به‌بازار رفتند. هریک از آنها در جای جداگانهٔ خود قرار گرفت و آمادهٔ فروش شد. خریداران به‌طرف دختر کوچک‌تر که ۵۰ تخم‌مرغ داشت، هجوم آوردند و ارزانی قیمت او را تحسین کردند. او ۷ بار تخم‌مرغ‌های ۷ تایی خود را فروخت و ۷ آلتین گرفت. در سبد او یک تخم‌مرغ باقی ماند. دختر دوم که ۳۰ تخم‌مرغ داشت، ۴ آلتین بابت ۴ دسته تخم‌مرغ ۷ تایی گرفت و ۲ تخم‌مرغ در سبدش ماند. دختر سوم، آلتین فروخت و ۳ تخم‌مرغ در سبدش ماند. دراین موقع، آشپز بارون به‌بازار آمد که به‌هرقیمتی که شده، تخم‌مرغ بخرد. پسر بارون به‌مهمانی پیش او آمده بود و خیلی تخم‌مرغ دوست داشت. آشپز، همهٔ بازار را چرخید و بالاخره پیش ۳ فروشنده آمد و دید که آن‌ها تنها ۶ تخم‌مرغ برای فروش دارند: یکی از آن‌ها یک تخم‌مرغ و دیگری ۲ عدد و سومی ۳ عدد داشت. آشپز ابتدا پهلوی دختر بزرگ‌تر رفت که ۳ تخم‌مرغ داشت و ۷ تخم‌مرغ خود را به‌یک آلتین فروخته بود و پرسید:

ـ ۳ تخم‌مرغت را چند می‌فروشی؟

ـ هریک به‌۳ آلتین.

آشپز گفت:

ـ مگر دیوانه شده‌ای؟ هر تخم‌مرغ به‌سه آلتین؟

دختر جواب داد:

ـ میل شماست. این قیمت آخر است. ارزان‌تر نمی‌دهم.

ـ چرا؟

ـ هر تخم‌مرغ سه آلتین، هرجا بروی قیمت همین است.

آشپز از دختر کوچک‌تر پرسید؟

ـ تو یک تخم‌مرغت را چند می‌فروشی؟

ـ سه آلتین.

راه دیگری برای آشپز باقی نماند. ناچار شد تخم‌مرغ‌ها را با همان قیمت باورنکردنی بخرد.

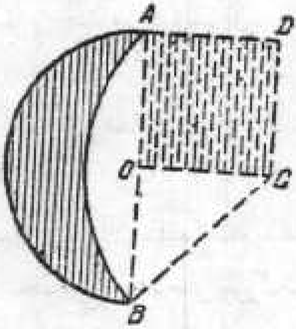
ـ بیایید هرچه تخم‌مرغ برایتان باقیمانده، بدهید.

آشپز بابت سه تخم‌مرغ، به‌دختر بزرگ‌تر ۹ آلتین پرداخت. درنتیجه جمع قیمت فروش دختر بزرگ‌تر ۱۰ آلتین شد. دختر دوم، برای ۲ تخم‌مرغ باقیماندهٔ خود، ۶ آلتین گرفت که با ۴ آلتین قبلی، که از فروش ۲۸ تخم‌مرغ به‌دست آورده بود، روی هم ۱۰ آلتین شد. دختر کوچک‌تر، یک تخم‌مرغ بیشتر نداشت و بنابراین ۳ آلتین از آشپز گرفت. ولی با فروش ۴۹ تخم‌مرغ قبلی، ۷ آلتین داشت. بنابراین او هم روی هم رفته ۱۰ آلتین به‌دست آورده بود.

آن وقت دخترها به‌منزل بازگشتند و هرکدام ۱۰ آلتین به‌مادر خود دادند، درضمن، توضیح دادند که چگونه هرسه نفر به‌یک ترتیب و با یک قیمت تخم‌مرغ‌هایشان را فروختند. ولی با وجود این، همان‌قدر که دختر بزرگ‌تر با فروش ۱۰ تخم‌مرغ، پول به‌دست آورده بود، دختر دوم با فروش ۳۰ تخم‌مرغ و دختر کوچک‌تر با فروش ۵۰ تخم‌مرغ،

به‌دست آورده بودند.

مادر از این‌که دید سفارش‌های او را با دقت انجام داده‌اند، و به‌ویژه از این که‌روی هم ۳۰ آلتین، یعنی ۹۰ کوپک پول برای او آورده‌اند، خوشحال شد و دختر بزرگ‌تر خود را، به‌خاطر هوش و درایتی که داشت، مورد تحسین قرار داد.»



شکل ۱۴۲

منتشر کرده‌ایم:

- **اصول و مبانی جامعه شناسی**

  دکتر سیاوش گلابی
- **معانی**

  دکتر سیروس شمیسا
- **بیگانه مثل معنی (تحلیل اشعار صائب تبریزی)**

  دکتر محمدحسین محمدی
- **ادب و هنر امروز ایران (چهار جلد)**

  جلال آل احمد
- **چهل طوطی**

  سیمین دانشور / جلال آل احمد
- **سفر به دیگر سو**

  کارلوس کاستاندا / برگردان: دل آرا قهرمان
- **هنر رؤیا دیدن**

  کارلوس کاستاندا / برگردان: مهران کندری
- **بازی با بی‌نهایت**

  روزا پتر / برگردان: پرویز شهریاری

خیابان مجاهدین اسلام، چهارراه آبسردار، شماره ۲۶۲ تلفن: ۳۱۲۴۵۳۳

۶۵۰۰ ریال